Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2014/15
02.02.2015

14. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G40 (Tangentialvektoren und Normalenvektoren)

(a) Skizzieren Sie die eindimensionale Untermannigfaltigkeit $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 3y^2 = 4\}$ von $\mathbb{R}^2$.

(b) Finden Sie eine Karte von M um $p := (1, 1)$. Berechnen Sie den Tangentialraum $T_p(M)$ und den Normalenraum $N_p(M)$.

(c) Zeichnen Sie einige Tangential- und Normalvektoren in ihre Skizze ein (wobei die Vektorpfeile im Punkt p starten sollen!).

(d) Machen Sie sich kurz klar, dass $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 3y^2 \leq 4\}$ ein Kompaktum mit glattem Rand ist. Zeichnen Sie K in ihre Skizze ein und bestimmen Sie den äußeren Normalenvektor $\nu(p)$ von K im Punkt p.

Aufgabe G41 (Kompakta mit glattem Rand)

Skizzieren Sie grob die Menge $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Finden Sie ∂K und zeigen Sie, dass K ein Kompaktum mit glattem Rand ist.

Aufgabe G42 (Satz von Stokes)

Gegeben ist die Fläche G definiert durch $z = 1 - x^2 - y^2$ und $0 \leq z$. Finden Sie einen Weg $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ der den Rand ∂G der Fläche entgegen dem Uhrzeigersinn parametrisiert und berechnen Sie

$$\int_\gamma F(\vec{x}) \bullet d\vec{x}$$

für $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$.

Aufgabe G43 (Extrema unter Nebenbedingungen)

Berechnen Sie die Extrema der Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$.