Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2014/15
03.11.2014

3. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G7 (Lineare DGL)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = xy + 3x.$$

(a) Lösen Sie die zugehörige homogene Gleichung mit Anfangsbedingung $y(0) = 1$.
(b) Lösen Sie die inhomogene Gleichung mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0$.

Lösung:

(a) Die Lösung der homogenen Gleichung ist $x \mapsto e^{x^2/2}$.
(b) Die Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$y(x) = e^{x^2/2} \left(y_0 + \int_0^x \frac{3t}{e^{t^2/2}} dt \right).$$

Das Integral auf der rechten Seite berechnet sich zu

$$\int_0^x \frac{3t}{e^{t^2/2}} dt = -\frac{3}{e^{t^2/2}}$$

und lässt noch eine kleine Vereinfachung für $y(x)$ zu.

Aufgabe G8 (Variation der Konstanten)

Betrachten Sie das System von Differentialgleichungen

$$y' = A(x) \cdot y + b(x),$$

wobei $A = A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}$.

(a) Finden Sie ein Lösungsfundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung.
(b) Finden Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung und geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

Lösung:

(a) Es gilt $A = E_2 + N$ mit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Also erhalten wir $tA = t \cdot E_2 + tN$ und da die Matrizen $(t \cdot E_2)$ und tN kommutieren, erhalten wir $e^{tA} = e^{t \cdot E_2} \cdot e^{tN} = e^t \cdot e^{tN}$. Also ist ein Lösungsfundamentalsystem gegeben durch

$$t \mapsto e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t. \end{pmatrix}$$

(b) Eine spezielle Lösung $\psi(x) = e^{xA}c(x)$ der inhomogenen DGL erhalten wir durch

$$c(x) = \int_0^x e^{-tA} \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} dt.$$

Es gilt

$$\int_0^x e^{-tA} \cdot b(t) dt = \int_0^x \begin{pmatrix} e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} dt = \int_0^x \begin{pmatrix} 1 - t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2}x^2 \\ x \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir

$$\psi(x) = e^{xA} \cdot c(x) = \begin{pmatrix} e^x & te^x \\ 0 & e^x. \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2}x^2 \\ x. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xe^x + \frac{3}{2}x^2e^x \\ xe^x. \end{pmatrix}$$

Aufgabe G9 (Charakteristisches Polynom einer Differentialgleichung)

Finden Sie Lösungsfundamentalsysteme der homogenen linearen Differentialgleichungen

(a) $y'' - 4y' + 2y = 0$,

(b) $y'' - 4y = 0$,

(c) $y'' + 4y = 0$.

Lösung:

(a) Doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist $\lambda = 2$. Ein Lösungsfundamentalsystem bilden also die Funktionen $y_1(x) = e^{2x}$ und $y_2(x) = xe^{2x}$.

(b) Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind $\lambda_{1,2} = \pm 2$. Ein Lösungsfundamentalsystem ist damit gegeben durch die Funktionen $y_{1,2}(x) = e^{\pm 2x}$.

(c) Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind $\lambda_{1,2} = \pm 2i = 0 \pm 2i$. Ein Lösungsfundamentalsystem ist damit gegeben durch die Funktionen $y_1(x) = e^{0x} \cos 2x = \cos 2x$ und $y_2(x) = e^{0x} \sin 2x = \sin 2x$.