Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2014/15
17.11.2014

5. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G13 (Weitere Beispiele von σ-Algebren)

Es sei X eine Menge.

(a) Es sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Teilmengen $A \subseteq X$ derart, dass A abzählbar ist oder $A^c = X \setminus A$ abzählbar ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf X ist.

(b) Finden Sie die von der Menge $\mathcal{E} = \big\{\{x\} : x \in X\big\}$ aller einpunktigen Teilmengen von X erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ auf X.

Lösung: (a) **S1**: $\emptyset$ ist eine abzählbare Menge, somit $\emptyset \in \mathcal{S}$.

S2: Sei $A \in \mathcal{S}$. 1. Fall: A ist abzählbar. Dann ist $A^c = X \setminus A \in \mathcal{S}$, denn $(A^c)^c = A$ ist abzählbar. 2. Fall: A^c ist abzählbar und somit $A^c \in \mathcal{S}$.

S3: Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen $A_n \in \mathcal{S}$. 1. Fall: Jede der Mengen A_n ist abzählbar. Dann ist auch die abzählbare Vereinigung $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar und somit $A \in \mathcal{S}$. 2. Fall: Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $(A_m)^c$ abzählbar ist. Mit der de Morganschen Identität sehen wir, dass dann auch $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^c \subseteq (A_m)^c$ abzählbar ist als Teilmenge einer abzählbaren Menge; somit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$.

(b) Da die σ-Algebra $\mathcal{S}$ aus (a) jede einpunktige Teilmenge von X enthält, ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$ und somit $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}$. Sei nun $A \in \mathcal{S}$. Ist A abzählbar, so ist $A = \bigcup_{a\in A}\{a\} \in \sigma(\mathcal{E})$. Ist A^c abzählbar, so ist nach dem Vorigen $A^c \in \sigma(\mathcal{E})$ und somit $A = (A^c)^c \in \sigma(\mathcal{E})$. Also $\mathcal{S} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Somit $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{E})$.

Aufgabe G14 (Urbilder und mengentheoretische Operationen)

Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(a) Für alle Teilmengen $A, B \subseteq Y$ ist $f^{-1}(B \setminus A) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$. Insbesondere gilt also $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$.

(b) Für jede Familie $(A_j)_{j\in J}$ von Teilmengen $A_j \subseteq Y$ gilt

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(A_j).$$

Lösung: (a) Für $x \in X$ sind äquivalent: $x \in f^{-1}(B \setminus A) \Leftrightarrow f(x) \in B \setminus A \Leftrightarrow (f(x) \in B$ und $f(x) \notin A) \Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B)$ und $x \notin f^{-1}(A)) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$.

(b) $x \in f^{-1}\big(\bigcap_{j\in J} A_j\big) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{j\in J} A_j \Leftrightarrow f(x) \in A_j$ für alle $j \in J \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A_j)$ für alle $j \in J \Leftrightarrow x \in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(A_j)$.

Aufgabe G15 (Direktes Bild und Zurückziehen einer σ-Algebra)

(a) Bestimmen Sie das direkte Bild $f_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ unter der Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \qquad f(x) := [x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

(b) Zeigen Sie: Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf Y, so ist die Menge $f^{-1}[\mathcal{S}]$ aller Urbilder messbarer Mengen eine σ-Algebra auf X. In Formeln:

$$f^{-1}[\mathcal{S}] := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{S}\}.$$

Lösung:

(a) Für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ gilt $f^{-1}(\{n\}) = [n, n{+}1[\, \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Also ist die einpunktige Menge $\{n\}$ im direkten Bild von $\mathcal{S}$ enthalten, es ist $\{n\} \in f_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Da jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{Z}$ abzählbar ist, folgt

$$A = \bigcup_{n \in A} \{n\} \in f_*(\mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Somit gehört jede Teilmenge von $\mathbb{Z}$ zu $f_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, es ist also $f_*(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ die volle Potenzmenge von $\mathbb{Z}$.

(b) Wir Überprüfen die Axiome **S1–S3** einer σ-Algebra, unter Benutzung der "Operationentreue der Urbild-Abbildung" (Lemma 1.22).
S1: Da $\emptyset \in \mathcal{S}$, ist $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}[\mathcal{S}]$.
S2: Ist $B \in f^{-1}[\mathcal{S}]$, so existiert $A \in \mathcal{S}$ mit $B = f^{-1}(A)$. Dann ist $A^c \in \mathcal{S}$ und somit $B^c = f^{-1}(A^c) \in f^{-1}[\mathcal{S}]$.
S3: Sind $B_1, B_2, \ldots \in f^{-1}[\mathcal{S}]$, so existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Menge $A_n \in \mathcal{S}$ mit Urbild $f^{-1}(A_n) = B_n$. Dann ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$ und somit

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \;=\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \;=\; f^{-1}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) \;\in\; f^{-1}[\mathcal{S}]\,.$$