Prof. Dr. Helge Glöckner — Wintersemester 2014/15
01.12.2014

7. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G19 (Lebesgue-Borel-Maß einiger Teilmengen von $\mathbb{R}$)

Es sei λ das Lebesgue-Borel-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Berechnen Sie $\lambda(A)$ für jede der folgenden Mengen A:

$$[0,1[\,; \quad \{0\}\,; \quad \mathbb{Q}\,; \quad [0,1[\,\cap\,\mathbb{Q}\,; \quad [0,1[\,\setminus\,\mathbb{Q}\,.$$

Lösung: Nach Definition des Lebesgue-Borel-Maßes λ auf $\mathbb{R}$ (vgl. Satz 2.5 (a)) gilt $\lambda([a,b[) = b-a$ für jedes rechts halboffene Intervall, insbesondere also $\lambda([0,1[) = 1-0 = 1$.

Da $\{0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}[$ mit $\lambda([0,1[) < \infty$ und $[0,1[\; \supseteq [0,1/2[\; \supseteq \cdots$, gilt nach Lemma 2.4 (d)

$$\lambda(\{0\}) \;=\; \lim_{n\to\infty} \lambda\big([0,1/n[\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \;=\; 0$$

(alternativ kann man Folgerung 2.7 benutzen).

Analog ist $\lambda(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $\mathbb{Q}$ eine abzählbare unendliche Menge ist, gibt es eine bijektive Abbildung $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto q_n$. Dann sind $\{q_n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkte Mengen mit Vereinigung $\mathbb{Q}$. Aufgrund der σ-Additivität von λ gilt also

$$\lambda(\mathbb{Q}) \;=\; \lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{q_n\}\Big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{q_n\}) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} 0 \;=\; 0\,.$$

Da $[0,1[\,\cap\,\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$, liefert die Monotonie des Maßes (Lemma 2.4 (b))

$$0 \;\leq\; \lambda([0,1[\,\cap\,\mathbb{Q}) \;\leq\; \lambda(\mathbb{Q}) \;=\; 0\,;$$

also ist $\lambda([0,1[\,\cap\,\mathbb{Q}) = 0$. Da $[0,1[\; = ([0,1[\,\setminus\,\mathbb{Q}) \cup ([0,1[\,\cap\,\mathbb{Q})$ eine Vereinigung disjunkter Mengen ist, gilt aufgrund der Additivität von λ (Lemma 2.4 (a))

$$\lambda([0,1[) \;= \lambda\big([0,1[\,\setminus\,\mathbb{Q}\big) \;+\; \lambda\big([0,1[\,\cap\,\mathbb{Q}\big)$$

und somit $\lambda\big([0,1[\,\setminus\,\mathbb{Q}\big) = \lambda([0,1[) - \lambda\big([0,1[\,\cap\,\mathbb{Q}\big) = 1 - 0 = 1$.

Aufgabe G20 (Etwas verzwicktere Teilmengen)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die Menge aller reellen Zahlen im Intervall $[0,1[$, deren Dezimalbruchentwicklung bis zur Stelle n keine 7 enthält.

Es sei A die Menge aller reellen Zahlen im Intervall $[0,1[$, deren Dezimalbruchentwicklung keine 7 enthält.

Es sei B die Menge aller reellen Zahlen im Intervall $[0,1[$, deren Dezimalbruchentwicklung mindestens eine 7 enthält.

(Hierbei betrachten wir nur Dezimalbrüche ohne Neunerperiode).

Zeigen Sie, dass A_n, A und B Borelmengen sind und berechnen Sie das Lebesgue-Borel-Maß dieser Mengen.

Lösung: Die Menge $J_n := \{0,1,2,3,4,5,6,8,9\}^n$ aller n-Tupel aus von 7 verschiedenen Ziffern hat 9^n Elemente, und es ist

$$A_n \;=\; \bigcup_{(d_1,\ldots,d_n)\in J_n} \big[0.d_1\cdots d_n,\; 0.d_1\cdots d_n + 10^{-n}\big[\,.$$

Als endliche Vereinigung halboffener Intervalle ist A_n eine Borelmenge. Da die beteiligten Intervalle paarweise disjunkt sind, folgt

$$\lambda(A_n) \;=\; \sum_{(d_1,\ldots,d_n)\in J_n} \lambda\big([0.d_1\cdots d_n,\; 0.d_1\cdots d_n + 10^{-n}[\big) \;=\; \sum_{(d_1,\ldots,d_n)\in J_n} 10^{-n} \;=\; 9^n\cdot 10^{-n}\,,$$

also $\lambda(A_n) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$. Weiter ist $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, und da $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ und $\lambda(A_1) < \infty$, folgt mit Lemma 2.4 (d)

$$\lambda(A) \;=\; \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n \;=\; 0\,.$$

Weiter ist $B = [0,1[\,\setminus A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\lambda(B) = \lambda([0,1[) - \lambda(A) = 1 - 0 = 1$.

Aufgabe G21 (Zur Maßdefinition)

(a) (Dirac-Maß). Es sei X eine Menge, $x \in X$ und $\delta_x\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ die durch

$$\delta_x(A) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A; \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

definierte Funktion. Prüfen Sie nach, dass δ_x ein Maß auf $(X, \mathcal{P}(X))$ ist.

(b) Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,\infty]$ eine σ-additive Funktion. Zeigen Sie: Ist $\mu(\emptyset) > 0$, so ist $\mu(A) = \infty$ für alle $A \in \mathcal{S}$.

Lösung: (a) Da $x \notin \emptyset$, ist $\delta_x(\emptyset) = 0$. Um die σ-Additivät von δ_x nachzuprüfen, seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{P}(X)$ paarweise disjunkte Mengen und $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Falls $x \in A_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so gilt $x \in A$ und $x \notin A_n$ für $n \neq m$, somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(A_n) \;=\; \delta_x(A_m) \;=\; 1 \;= \delta_x(A)\,.$$

Ist hingegen $x \notin A_n$ für alle n, so ist $x \notin A$ und $\delta_x(A) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(A_n)$.

(b) Gegeben $A \in \mathcal{S}$ setzen wir $A_1 := A$ und $A_n := \emptyset$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Dann sind die Mengen A_n paarweise disjunkt, somit aufgrund der σ-Additivität von μ:

$$\mu(A) \;=\; \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \;=\; \mu(A) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(\emptyset) \;=\; \infty\,.$$