Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2014/15
08.12.2014

8. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G22 (Erste Beispiele von Integralen)

In dieser Aufgabe sei λ das Lebesgue-Borel-Maß auf $\mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1[}\, d\lambda\,; \quad \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}\, d\lambda\,; \quad \int_{\mathbb{R}} (1+\cos(x))\, d\lambda(x)\,; \quad \int_{[\frac{1}{2},3[} [x]\, d\lambda(x)\,.$$

(b) Entscheiden Sie, ob das Integral im Sinne von Definition 3.9 definiert ist und berechnen Sie es in diesem Fall. Ist der Integrand eine integrierbare Funktion?

$$\int_{[-1,2[} [x]\, d\lambda(x)\,; \qquad \int_{\mathbb{R}} \cos(x)\, d\lambda(x)\,; \qquad \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{1}_{[0,\infty[} - \mathbf{1}_{[-2,-1]})\, d\lambda\,.$$

Lösung: (a) Nach Schritt 1 der Integraldefinition (Integral für charakteristische Funktionen) ist

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1[}\, d\lambda \;=\; \lambda([0,1[) \;=\; 1$$

sowie (mit Aufgabe G22)

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}\, d\lambda \;=\; \lambda(\mathbb{Q}) \;=\; 0\,.$$

Die Funktion $x \mapsto 1+\cos(x)$ ist messbar und nicht-negativ, wir befinden uns also in der Situation von Schritt 3 der Integraldefinition. Da $1+\cos(x) \geq 1$ für $x \in A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n[$, ist die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_A$ eine nicht-negative Stufenfunktion mit $\mathbf{1}_A \leq 1+\cos$ und somit

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (1+\cos(x))\, d\lambda(x) \;&\stackrel{\text{def}}{=}\; \sup\Big\{ \int_{\mathbb{R}} s\, d\lambda : s \text{ Stufenfkt. mit } 0 \leq s \leq 1+\cos \Big\} \\
&\geq\; \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A\, d\lambda \;=\; \lambda(A) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\big(]-\tfrac{\pi}{2}+2\pi n, \tfrac{\pi}{2}+2\pi n[\big) \\
&=\; \sum_{n=1}^{\infty} \pi \;=\; \infty\,.
\end{aligned}$$

Also $\int_{\mathbb{R}} (1+\cos(x))\, d\lambda(x) = \infty$.

Die Funktion $f : [\frac{1}{2}, 3[\to \mathbb{R},\ f(x) := [x]$ ist eine nicht-negative Stufenfunktion: Unter Benutzung von charakteristischen Funktionen auf $[\frac{1}{2}, 3[$ haben wir

$$f \;=\; \mathbf{1}_{[1,2[} + 2\,\mathbf{1}_{[2,3[}\,.$$

Also gilt nach Schritt 2 der Integraldefinition (oder auch Lemma 3.14 (a)):

$$\int_{[\frac{1}{2},3[} f\,d\lambda \;=\; 1\,\lambda([1,2[) + 2\,\lambda([2,3[) \;=\; 3\,.$$

(b) Jede der Funktionen $f : [-1,2[\ \to \mathbb{R},\ f(x) := [x]$ sowie $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g := \mathbf{1}_{[0,\infty[} - \mathbf{1}_{[-2,-1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist offensichtlich messbar (da sie stetig ist, bzw. nach Lemma 3.2).

Mithilfe von charakteristischen Funktionen auf $]-1,2[$ können wir den Positiv- und Negativteil von f beschreiben in der Form

$$f_+ \;=\; \mathbf{1}_{[1,2[}\,; \qquad f_- \;=\; \mathbf{1}_{[-1,0[}\,.$$

Wegen $\int_{[-1,2[} f_+\,d\lambda = \int_{[-1,2[} \mathbf{1}_{[1,2[}\,d\lambda = \lambda([1,2[) = 1 < \infty$ und $\int_{[-1,2[} f_-\,d\lambda = \int_{[-1,2[} \mathbf{1}_{[-1,0[}\,d\lambda = \lambda([-1,0[) = 1 < \infty$ ist f bzgl. λ über $[-1,2[$ integrierbar, mit

$$\int_{[-1,2[} f\,d\lambda \overset{\text{def}}{=} \int_{[-1,2[} f_+\,d\lambda - \int_{[-1,2[} f_-\,d\lambda \;=\; 1-1 \;=\; 0\,.$$

Setzen wir $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} [-\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n[$ und $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi n[$, so gilt $\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{1}_A \le \cos_+$ und $\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{1}_B \le \cos_-$, somit

$$\int_{\mathbb{R}} \cos_+\,d\lambda \;\ge\; \int_{\mathbb{R}} \tfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{1}_A\,d\lambda \;=\; \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\lambda(A) \;=\; \infty$$

und analog $\int_{\mathbb{R}} \cos_-\,d\lambda \ge \frac{\sqrt{2}}{2}\,\lambda(B) = \infty$. Wegen $\int_{\mathbb{R}} \cos_+\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \cos_-\,d\lambda = \infty$ ist das Integral $\int_{\mathbb{R}} \cos(x)\,d\lambda(x)$ nicht definiert.

Wegen $g_+ = \mathbf{1}_{[0,\infty[}$ und $g_- = \mathbf{1}_{[-2,-1]}$ ist

$$\int_{\mathbb{R}} g_+\,d\lambda \;=\; \lambda([0,\infty[) \;=\; \infty \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} g_-\,d\lambda \;=\; \lambda([-2,-1]) \;=\; 1\,.$$

Also ist das Integral von g bzgl. λ über $\mathbb{R}$ definiert mit

$$\int_{\mathbb{R}} g\,d\lambda \;=\; \int_{\mathbb{R}} g_+\,d\lambda - \int_{\mathbb{R}} g_-\,d\lambda \;=\; \infty - 1 \;=\; \infty\,.$$

Da das Integral nicht endlich ist, ist g nicht integrierbar.

Aufgabe G23 (Konvergenzsätze)

Warum existieren die Limites und was ist ihr Wert ?

$$\text{(a)} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{\sin(x)}\, d\lambda(x)\,; \qquad \text{(b)} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} x^n\, d\lambda(x)\,.$$

Lösung: (a) Als Integranden treten die nicht-negativen, messbaren Funktionen $f_n : [0,\pi] \to [0,\infty[$, $f_n(x) := \sqrt[n]{\sin(x)}$ auf (für $n \in \mathbb{N}$). Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, mit Grenzfunktion $\mathbf{1}_{]0,\pi[}$. Nach dem Satz über monotone Konvergenz (Satz 3.21) gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{\sin(x)}\, d\lambda(x) \;=\; \int_{[0,\pi]} \mathbf{1}_{]0,\pi[}\, d\lambda \;=\; \lambda(]0,\pi[) \;=\; \pi\,. \tag{1}$$

Alternativer Beweis: Da $f_n(x) \to \mathbf{1}_{]0,\pi[}$ und $f_n \leq 1$ für alle x, wobei $\int_{[0,\pi]} 1\, d\lambda = \pi < \infty$, gilt (1) nach dem Satz über majorisierte Konvergenz (Satz 3.29).

(b) Die Integranden $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$ sind messbar und konvergieren punktweise gegen die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_{\{1\}} : [0,1] \to \mathbb{R}$. Die konstante Funktion $g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) := 1$ ist nicht-negativ und integrierbar, da $\int_{[0,1]} g\, d\lambda = \lambda([0,1]) = 1 < \infty$. Weiter gilt $|f_n(x)| \leq 1 = g(x)$ für alle $x \in [0,1]$. Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz (Satz 3.29) gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} x^n\, d\lambda(x) \;=\; \int_{[0,1]} \mathbf{1}_{\{1\}}\, d\lambda \;=\; \lambda(\{1\}) \;=\; 0\,.$$

Aufgabe G24 (Approximation von Integralen)

Seien $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $f \colon X \to [0,\infty]$ eine integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Menge $A \in \mathcal{S}$ mit $\mu(A) < \infty$ gibt, sodass

$$\int_X f d\mu - \int_B f d\mu < \varepsilon$$

für jedes $B \in \mathcal{S}$ mit $A \subseteq B$.

Lösung: Sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen mit $f = \lim_{n\to\mathbb{N}} s_n$. Es gilt $M := \int_X f d\mu < \infty$ und wir finden ein $N \in \mathbb{N}$ mit $M - \int_X s_N d\mu < \varepsilon$. Wir finden $m \in \mathbb{N}$ sowie $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in [0,\infty[$ und $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{S}$, sodass

$$\int_X s_N = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mu(A_k).$$

O.B.d.A. nehmen wie $\alpha_k \neq 0$ für alle $k \in \{1, \dots, m\}$ an. Da f integriebar ist, muss auch s_N integrierbar sein, daher muss $\mu(A_k) < \infty$ für alle k gelten. Wir definieren $A := \bigcup_{k=1}^m A_k$ und erhalten $\mu(A) < \infty$.

Sei nun $B \in \mathcal{S}$ mit $A \subseteq B$. Wir erhalten

$$\int_X s_N = \int_A s_N = \int_B s_N$$

und somit

$$|\int_X s_N d\mu - \int_B f d\mu| = |\int_B s_N d\mu - \int_B f d\mu| = \int_B f d\mu - \int_B s_N d\mu \leq \int_X f d\mu - \int_B s_N d\mu$$
$$= \int_X f d\mu - \int_X s_N d\mu \leq \varepsilon$$

Nun schließen wir

$$|\int_X f d\mu - \int_B f d\mu| \leq |M - \int_X s_N d\mu| + |\int_X s_N d\mu - \int_B f d\mu| \leq 2\varepsilon.$$