Prof. Dr. Helge Glöckner | Wintersemester 2014/15
15.12.2014

9. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G25 (Bildmaße)

Es sei $f\colon (X,\mathcal{S}) \to (Y,\mathcal{T})$ eine messbare Abbildung zwischen Messräumen und μ ein Maß auf $(X,\mathcal{S})$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\quad f_*(\mu)\colon \mathcal{T} \to [0,\infty]\,,\;\; f_*(\mu)(A) \;:=\; \mu(f^{-1}(A))$

ist ein Maß auf $(Y,\mathcal{T})$ (genannt das “Bildmaß von μ unter f.”)

(b) Ist auch $(Z,\mathcal{U})$ ein Messraum und $g\colon (Y,\mathcal{T}) \to (Z,\mathcal{U})$ messbar, so ist

$$(g\circ f)_*(\mu) \;=\; g_*\big(f_*(\mu)\big)\,.$$

Lösung: (a) Es ist $f_*(\mu)(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_n \in \mathcal{T}$, so sind nach Lemma 1.22 (c) auch die Mengen $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{S}$ paarweise disjunkt und $f^{-1}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$, somit

$$\begin{aligned} f_*(\mu)\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) &= \mu\Big(f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)\Big) \;=\; \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\big(f^{-1}(A_n)\big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} f_*(\mu)(A_n)\,. \end{aligned}$$

Also ist $f_*(\mu)$ ein Maß auf $(Y,\mathcal{T})$.

(b) Für alle $A \in \mathcal{U}$ gilt $(g\circ f)_*(\mu)(A) = \mu((g\circ f)^{-1}(A)) = \mu\big(f^{-1}(g^{-1}(A))\big) = f_*(\mu)\big(g^{-1}(A)\big) = g_*(f_*(\mu))(A)$. Also $(g\circ f)_*(\mu) = g_*(f_*(\mu))$.

Aufgabe G26 (Konvergenz fast überall)

Es sei $q\colon \mathbb{N} \to \,]0,1[\, \cap\, \mathbb{Q},\; n \mapsto q_n$ eine Bijektion. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\sqrt{|x-q_n|}}$$

für λ-fast alle $x \in \,]0,1[$ gegen eine reelle Zahl konvergiert (hier $1/0 := \infty$).

Hinweis: In $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert die Reihe für alle x. Ist $\displaystyle\int_{]0,1[} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\sqrt{|x-q_n|}}\, d\tilde{\lambda}(x) \;<\; \infty$? Nutzt das?

Lösung: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{]0,1[} \frac{2^{-n}}{\sqrt{|x-q_n|}}\, d\tilde{\lambda}(x) \;&=\; \int_{]0,q_n[} \frac{2^{-n}}{\sqrt{|x-q_n|}}\, d\tilde{\lambda}(x) \;+\; \underbrace{\int_{\{q_n\}} \frac{2^{-n}}{\sqrt{|x-q_n|}}\, d\tilde{\lambda}(x)}_{=0} \\
&\quad +\; \int_{]q_n,1[} \frac{2^{-n}}{\sqrt{|x-q_n|}}\, d\tilde{\lambda}(x) \\
&=\; \int_0^{q_n} \frac{2^{-n}}{\sqrt{|x-q_n|}}\, dx \;+\; \int_{q_n}^1 \frac{2^{-n}}{\sqrt{|x-q_n|}}\, dx \\
&\leq\; 2\int_0^1 \frac{2^{-n}}{\sqrt{t}}\, dt \;=\; \Big[4\cdot 2^{-n}\sqrt{t}\Big]_0^1 \;=\; 4\cdot 2^{-n}\,.
\end{aligned}$$

Hierbei beruht das erste Gleichheitszeichen auf Satz 3.15 (a), dann wurde Lemma 3.12 (e) benutzt und schließlich Folgerung 4.16 für das zweite Gleichheitszeichen, zum Umschreiben der Lebesgue-Integrale in uneigentliche Riemann-Integrale. Mit Folgerung 3.25 erhält man nun

$$\int_{]0,1[} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\sqrt{|x-q_n|}}\, d\tilde{\lambda}(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_{]0,1[} \frac{2^{-n}}{\sqrt{|x-q_n|}}\, d\tilde{\lambda}(x) \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} 4\cdot 2^{-n} \;=\; 16 \;<\; \infty$$

unter Benutzung der Summenformel für die geometrische Reihe. Also ist die durch $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\sqrt{|x-q_n|}} \in [0,\infty]$ definierte Funktion $f : \,]0,1[\, \to [0,\infty]$ bzgl. $\tilde{\lambda}$ über $]0,1[$ integrierbar und somit $f(x) \in \mathbb{R}$ für $\tilde{\lambda}$-fast alle $x \in \,]0,1[$, nach Lemma 3.12 (f). Für diese x ist die Reihe also in $\mathbb{R}$ konvergent.

Aufgabe G27 (Riemann-Integrale als Lebesgue-Integrale)

Berechnen Sie das Lebesgue-Integral $\int_{[0,1]} f\, d\tilde{\lambda}$, in dem Sie es auf ein geeignetes Riemann-Integral zurückführen:

$$\text{(a)}\quad f(x) \;:=\; x^2 \qquad\qquad \text{(b)}\quad f(x) \;:=\; \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x \in \mathbb{Q}\cap[0,1]; \\ x^2 & \text{für } x \in \;[0,1]\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Lösung: (a) Als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ Riemann-integrierbar, nach Satz 4.13 also auch Lebesgue-integrierbar mit gleichem Integral:

$$\int_{[0,1]} x^2\, d\tilde{\lambda}(x) \;=\; \int_0^1 x^2\, dx \;=\; \Big[x^3/3\Big]_0^1 \;=\; 1/3\,.$$

Wir könnten hier übrigens auch das Lebesgue-Maß $\tilde{\lambda}$ durch das Lebesgue-Borel-Maß λ ersetzen, da f stetig und somit $f\colon ([0,1],\mathcal{B}([0,1])) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist.

(b) Die Funktion f stimmt außerhalb der abzählbaren Menge $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ vom Maß $\tilde{\lambda}([0,1]\cap\mathbb{Q}) = \lambda([0,1]\cap\mathbb{Q}) = 0$ mit der Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^2$ überein. Es gilt also

$f(x) = g(x)$ fast überall. Da die Lebesgue-Integrale von f und g nach Folgerung 3.18 (c) übereinstimmen, erhalten wir mit Teil (a):

$$\int_{[0,1]} f \, d\tilde{\lambda} \;=\; \int_{[0,1]} g \, d\tilde{\lambda} \;=\; \int_0^1 x^2 \, dx \;=\; 1/3\,.$$