Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2014/15
12.01.2015

11. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G31 (Cavalierisches Prinzip)

Es seien $a, b > 0$ und $M := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\big\}$.

(a) Skizzieren Sie M für $a = 1$, $b = 2$.

(b) Bestimmen Sie $M_y := \{x \in \mathbb{R} \colon (x,y) \in M\}$ für $y \in \mathbb{R}$.

(c) Berechnen Sie das 2-dimensionale Volumen $\lambda_2(M)$ von M.

Lösung: (b) Gegeben $y \in \mathbb{R}$ ist $M_y = \{x \in \mathbb{R} \colon (x/a)^2 \leq 1 - (y/b)^2\}$. Es ist also $M_y = \emptyset$ für $|y| > b$, während für $|y| \leq b$

$$M_y \ = \ \{x \in \mathbb{R} \colon |x| \leq a\sqrt{1-(y/b)^2}\}$$

ein Intervall der Länge $2a\sqrt{1-(y/b)^2}$ ist.

(c) Nach dem Prinzip von Cavalieri ist

$$\begin{aligned}
\lambda_2(M) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(M_y)\, d\lambda_1(y) \ = \ \int_{[-b,b]} 2a\sqrt{1-(y/b)^2}\, d\lambda_1(y) \\
&= \int_{-b}^{b} 2a\sqrt{1-(y/b)^2}\, dy \ = \ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2ab\cos^2(u)\, du \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ab(1+\cos(2u))\, du \ = \ \pi ab\,,
\end{aligned}$$

wobei zur Berechnung des Riemann-Integrals $y = b\sin(u)$, $dy = b\cos(u)\, du$ substituiert wurde.

Aufgabe G32 (Berechnung einiger Volumina)

(a) Berechnen Sie das Volumen $\lambda_3(M)$ des Ellipsoids $M := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\big\}$, wobei $a, b, c > 0$.

(b) Berechnen Sie mit dem Prinzip von Cavalieri das Volumen des Körpers $M := K \cap Z$, der durch Schneiden der Kugel $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ und des Zylinders $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$ entsteht.

Lösung: (a) Gegeben $z \in \mathbb{R}$ ist $M_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x/a)^2 + (y/b)^2 \le 1 - (z/c)^2\}$. Also ist $M_z = \emptyset$ wenn $|z| > c$; $M_z = \{(0,0)\}$ wenn $|z| = c$;

$$M_z \;=\; \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \Big(\frac{x}{a\sqrt{1-(z/c)^2}}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b\sqrt{1-(z/c)^2}}\Big)^2 \le 1\Big\}$$

wenn $|z| < c$. Letzteres ist eine Ellipse, deren Flächeninhalt laut Aufgabe G32

$$\lambda_2(M_z) \;=\; \pi a\sqrt{1-(z/c)^2} \cdot b \cdot \sqrt{1-(z/c)^2} \;=\; \pi ab(1-(z/c)^2)$$

ist. Mit dem Prinzip von Cavalieri erhalten wir folglich

$$\begin{aligned}
\lambda_3(M) \;&=\; \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(M_z)\, d\lambda_1(z) \;=\; \int_{[-c,c]} \pi ab(1-(z/c)^2)\, d\lambda_1(z)\\
&=\; \pi ab \int_{-c}^{c} (1-(z/c)^2)\, dz \;=\; \pi ab \Big[z - \frac{z^3}{3c^2}\Big]_{-c}^{c}\\
&=\; \pi ab\,(2c - 2c/3) \;=\; \tfrac{4\pi}{3} abc\,.
\end{aligned}$$

(b) Gegeben $z \in \mathbb{R}$ ist $M_z = \emptyset$ falls $|z| > 1$; $M_z = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1/2\}$ (und somit $\lambda_2(M_z) = \pi/2$) falls $|z| \le \sqrt{2}/2$; $M_z = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1 - z^2\}$ (und somit $\lambda_2(M_z) = \pi(1-z^2)$) falls $\sqrt{2}/2 < |z| \le 1$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
\lambda_3(M) \;&=\; \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(M_z)\, d\lambda_1(z)\\
&=\; \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \pi/2\, dz \;+\; \int_{-1}^{-\sqrt{2}/2} \pi(1-z^2)\, dz \;+\; \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \pi(1-z^2)\, dz\\
&=\; \pi\sqrt{2}/2 \;+\; 2\pi\Big[z - z^3/3\Big]_{\sqrt{2}/2}^{1} \;=\; \pi\sqrt{2}/2 \;+\; 2\pi\big(2/3 - \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/12\big)\\
&=\; \frac{\pi}{3}(4-\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Aufgabe G33 (Eine Lebesgue-, aber nicht Riemann-integrierbare Funktion)

Es sei $q \colon \mathbb{N} \to Q := \mathbb{Q} \cap\,]0,1[$ eine Bijektion. Gegeben $\varepsilon \in\,]0,1[$ wählen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein offenes Intervall $U_n \subseteq\,]0,1[$ derart, dass $q_n \in U_n$ und U_n höchstens die Länge $\varepsilon/2^n$ hat. Dann ist

$$Q \;\subseteq\; U \;:=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \;\subseteq\;]0,1[\quad \text{und} \quad \lambda(U) \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n) \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \;=\; \varepsilon\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion $f := \mathbf{1}_U : [0,1] \to \mathbb{R}$ bzgl. λ über $[0,1]$ integrierbar ist, mit $\int_{[0,1]} f d\lambda \le \varepsilon$.

(b) Berechnen Sie das Oberintegral $\;{}^{*}\!\!\int_0^1 f(x)\, dx$ und schließen Sie, dass f nicht über $[0,1]$ Riemann-integrierbar ist [Welchen Wert hätte sonst das Riemann-Integral ?]

(c) Zeigen Sie, dass $U \setminus N$ in $]0,1[$ dicht ist, für jede λ-Nullmenge $N \subseteq]0,1[$.

(d) Nun sei $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $g(x) = f(x)$ λ-fast überall. Zeigen Sie, dass auch g nicht über $[0,1]$ Riemann-integrierbar ist.

Die Lebesgue-integrierbare Funktion f lässt sich also nicht einmal durch Abändern auf einer Nullmenge zu einer Riemann-integrierbaren Funktion machen.

Lösung: (a) Als charakteristische Funktion einer offenen und somit Borelschen Menge ist $\mathbf{1}_U$ messbar. Per Integraldefinition für charakteristische Funktionen ist nun

$$\int_{[0,1]} \mathbf{1}_U \, d\lambda \;=\; \lambda(U) \;\leq\; \varepsilon \;<\; \infty$$

(siehe Rechnung im Aufgabentext). Also ist $f = \mathbf{1}_U$ bzgl. λ über $[0,1]$ integrierbar und die gewünschte Ungleichung gilt.

(b) Gegeben reelle Zahlen

$$0 \;=\; t_0 \;<\; t_1 \;<\; t_2 \;<\; \cdots \;<\; t_n \;=\; 1 \tag{1}$$

enthält für jedes $j \in \{1,\ldots,n\}$ das Intervall $]t_{j-1},t_j[$ eine rationale Zahl, es ist also $]t_{j-1},t_j[\, \cap U \neq \emptyset$ und somit $M_j := \sup\{\mathbf{1}_U(x) : x \in [t_{j-1},t_j]\} = 1$. Für die zur in (1) beschriebenen Zerlegung Z gehörige Obersumme erhält man also

$$O(Z,f) \;=\ldots \sum_{j=1}^{n} M_j(t_j - t_{j-1}) \;=\ldots \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1}) \;=\; 1\,.$$

Das Oberintegral ist das Infimum der Menge aller Obersummen, also ${}^*\!\!\int_0^1 f(x)\,dx = 1$. Wäre f Riemann-integrierbar, so wäre $\int_0^1 f(x)\,dx \;=\; {}^*\!\!\int_0^1 f(x)\,dx \;=\; 1$. Andererseits müsste das Riemann-Integral nach Satz 4.13 jedoch mit dem Lebesgue-Integral zusammenfallen, wir hätten also

$$\int_0^1 f(x)\,dx \;=\; \int_{[0,1]} f\, d\tilde{\lambda} \;=\; \int_{[0,1]} f\, d\lambda \;\leq \varepsilon \;<\; 1\,,$$

Widerspruch (hierbei konnten wir wegen der Borel-Messbarkeit von f das Integral bzgl. $\tilde{\lambda}$ durch jenes bzgl. λ ersetzen, siehe Satz 4.10 (a)).

(c) Wäre $U \setminus N$ nicht in $]0,1[$ dicht, so gäbe es eine nicht-leere offene Teilmenge $V \subseteq]0,1[$ mit $V \cap (U \setminus N) = \emptyset$. Dann wäre erst recht

$$(V \cap U) \cap (U \setminus N) \;=\; \emptyset\,. \tag{2}$$

Da U wegen $]0,1[\, \cap \mathbb{Q} \subseteq U$ in $]0,1[$ dicht ist, ist $V \cap U \neq \emptyset$. Aus (2) folgt $V \cap U \subseteq N$. Somit hätte N nicht-leeres Inneres, was Aufgabe G30 (d) widerspricht.

(d) Da $g(x) = f(x)$ fast überall, ist $N := \{x \in [0,1] : f(x) \neq g(x)\}$ eine μ-Nullmenge. Nach (c) ist $U \setminus N$ dicht in $]0,1[$. Da

$$g(x) \;=\; f(x) \;=\; 1 \qquad \text{für alle } x \in U \setminus N,$$

sehen wir wie in (b), dass jede Obersumme von g gleich 1 ist, somit $\overline{\int_0^1} g(x)\,dx = 1$. Wäre g Riemann-integrierbar, so erhielten wir wie in (c) den Widerspruch

$$1 \;=\; {}^{*}\!\!\int_0^1 g(x)\,dx \;=\; \int_0^1 g(x)\,dx \;=\; \int_{[0,1]} g\;d\tilde{\lambda} \;=\; \int_{[0,1]} f\;d\tilde{\lambda} \;<\; 1\,,$$

wobei das vierte Gleichheitszeichen auf Folgerung 3.18 (c) beruht.