Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2014/15
19.01.2015

12. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G34 (Integration auf Flächen)

Seien $h\colon]-1,1[^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \sqrt{1-x^2}$, $M := \operatorname{graph}(h)$ und $f\colon M \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x$.

(a) Zeichnen Sie M.
(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von M.
(c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_M f dS_M.$$

Lösung:

(b) Es gilt

$$||1 + \nabla h(x,y)||_2^2 = \frac{1}{1-x^2}.$$

Wir erhalten

$$S_M(M) = \int_{]-1,1[^2} \sqrt{1 + \nabla h(x,y)||_2^2} d\lambda_2(x,y) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dxdy$$
$$= \int_{-1}^{1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dxdy = 2\pi.$$

Bei der Integration wurde eine Rückwertssubstitution mit sin durchgeführt.

(c) Wir berechnen das Integral

$$\int_{]-1,1[^2} f(x,y,h(x,y)) \cdot \sqrt{1 + \nabla h(x,y)||_2^2} d\lambda_2(x,y) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dxdy = 0.$$

Aufgabe G35 (Integralsatz von Gauß)

Gegeben ist die Kugel $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ und das Vektorfeld $F(x,y,z) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie das äußere Normalenfeld ν von ∂K, dem Rand von K. Verifizieren Sie dann den Integralsatz von Gauß, indem Sie

(a) $\int_K \operatorname{div} F(x,y,z)\, d(x,y,z)$ und
(b) $\int_{\partial K} F \bullet d\vec{S}$

berechnen und vergleichen.
Hinweis zu (b): Spalten Sie die Kugel auf so, dass Sie die einzelnen Teile jeweils als Graph darstellen können.
Lösung: Wir stellen die Fläche der oberen Halbkugel ∂O auf die bekannte Art und Weise als Graph von

$$h_O\colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad h_O(x,y) := \sqrt{1-x^2-y^2}$$

mit $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 < x < 1, -\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}\}$ dar. Für das äußere Normalenfeld erhalten wir also

$$\nu_O(x,y,h(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Fläche der unteren Halbkugel erhalten wir als Graph von

$$h_U\colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad h_U(x,y) := -\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Damit ergibt sich das Normalenfeld auf ∂U als

$$\nu(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}) = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und deswegen erhalten wir $\nu_U(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ -1 \end{pmatrix}$ als äußeres Normalenfeld auf ∂U.
(a) Wir rechnen

$$\int_K \operatorname{div} F(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_K 3\, d(x,y,z) \overset{\text{Kugeloordinaten}}{=} 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin(\phi)\, d\phi d\varphi dr$$
$$= 2 \cdot 2\pi = 4\pi.$$

(b) Mit den obigen Überlegungen rechnen wir

$$\int_{\partial O} F \bullet d\vec{S} = \int_\Omega \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} d(x,y) = \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, d(x,y)$$

$$\overset{\text{Polarkoordinaten}}{=} \lim_{a\to 1} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, d\varphi dr = 2\pi \left(-\sqrt{1-r^2}\right)\Big|_0^1 = 2\pi.$$

Da sich die negativen Vorzeichen aufheben folgern wir $\int_{\partial U} F \bullet d\vec{S} = 2\pi$ und somit gilt $\int_{\partial K} F \bullet d\vec{S} = 4\pi$.

Aufgabe G36 (Normalbereiche und Vertauschen der Variablen)
Gegeben sei der Normalbereich $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \quad 0 \le x \le 1, -x \le y \le x\}$.

(a) Skizzieren Sie A und bestimmen Sie anhand der Skizze den Flächeninhalt von A.

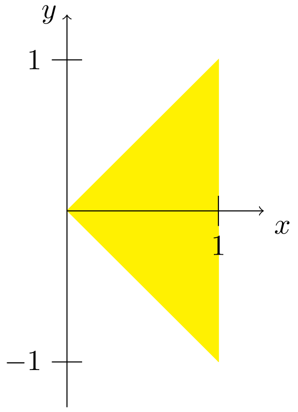
(b) Berechnen Sie das Integral $\int_A 1\, d(x,y)$.

(c) Vertauschen Sie die Variablen in A, d.h. finden Sie Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ und stetige Funktionen $f_1, f_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ so, dass

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \quad a \leq y \leq b, f_1(y) \leq x \leq f_2(y)\}$$

gilt.

Lösung: (a)



Der Flächeninhalt von A ist also $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

(b) Nach der Vorlesung haben wir

$$\int_A 1\, d(x,y) = \int_0^1 \int_{-x}^{x} 1\, dy dx = \int_0^1 2x\, dx = x^2\Big|_0^1 = 1.$$

(c) Aus (a) sehen wir sofort, dass $-1 \leq y \leq 1$ gelten muss. Für $0 \leq y \leq 1$ setzen wir in die Ungleichung in der Definition von A ein und erhalten $y \leq x \leq 1$. Analog erhalten wir für $-1 \leq y \leq 0$ die Ungleichung $-y \leq x \leq 1$, indem wir $-x \leq y$ nach x umstellen. Daraus ergeben sich die Funktionen $f_1, f_2\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(y) := \begin{cases} y & \text{falls } y \geq 0 \\ -y & \text{falls } y \leq 0. \end{cases} \quad \text{und} \quad f_2(y) := 1.$$