Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2014/15
02.02.2015

14. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G40 (Tangentialvektoren und Normalenvektoren)

(a) Skizzieren Sie die eindimensionale Untermannigfaltigkeit $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 3y^2 = 4\}$ von $\mathbb{R}^2$.

(b) Finden Sie eine Karte von M um $p := (1,1)$. Berechnen Sie den Tangentialraum $T_p(M)$ und den Normalenraum $N_p(M)$.

(c) Zeichnen Sie einige Tangential- und Normalvektoren in ihre Skizze ein (wobei die Vektorpfeile im Punkt p starten sollen!).

(d) Machen Sie sich kurz klar, dass $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 3y^2 \leq 4\}$ ein Kompaktum mit glattem Rand ist. Zeichnen Sie K in ihre Skizze ein und bestimmen Sie den äußeren Normalenvektor $\nu(p)$ von K im Punkt p.

Lösung: (a) M ist eine Ellipse(nlinie) mit den Halbachsen 2 und $2/\sqrt{3}$.

(b) **Erste naheliegende Möglichkeit:** $M \cap \big(]-2,2[\times]0,\infty[\big)$ ist der Graph der C^1-Funktion $h \colon]-2,2[\to \mathbb{R}$, $h(x) := \sqrt{\frac{4-x^2}{3}}$. Somit (siehe Vorlesung) ist

$$\phi \colon]-2,2[\to M\,, \quad \phi(x) \;:=\; (x, h(x)) \;=\; \left(x,\ \sqrt{\frac{4-x^2}{3}}\right)$$

eine Karte für M. Da $p := (1,1) = \phi(1)$, ist ϕ eine Karte um p. Nach Lemma 1.17 ist nun

$$T_p(M) \;=\; \operatorname{im} \phi'(1) \;=\; \mathbb{R}\,\phi'(1) \;=\; \mathbb{R}\,(1, h'(1)) \;=\; \mathbb{R}\left(1, -\tfrac{1}{3}\right);$$

hierbei wird im zweiten Ausdruck $\phi'(1)$ als lineare Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ betrachtet, im dritten Ausdruck als der entsprechende Vektor in $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung: Es ist wichtig, dass Sie sich der zweifachen Belegung des Symbols “$\phi'(x)$” im Falle eines Weges ϕ bewusst sind und sich bei der Lektüre des Skripts (und auch sonst) immer zuerst klar machen, was gerade gemeint ist.

Der Normalenraum $N_p(M)$ besteht aus den auf $(1, -\frac{1}{3})$ orthogonalen Vektoren, also aus den Vielfachen von $(\frac{1}{3}, 1)$. Somit ist $N_p(M) = \mathbb{R}\,(\frac{1}{3}, 1)$.

Zweite naheliegende Möglichkeit: $\phi \colon]0, 2\pi[\to M$, $\phi(t) := \big(2\cos t,\ \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t\big)$ ist eine injektive Immersion und somit nach Lemma 9.28 eine Karte für M mit $(1,1) = \phi(\arccos(1/2)) = \phi(\pi/3)$. Auch mit dieser Karte können wir $T_p(M) = \operatorname{im} \phi'(\pi/3)$ und $N_p(M)$ berechnen.

(c) In der obigen Skizze sind $T_p(M)$ und $N_p(M)$ bereits eingetragen (wobei alle Vektoren vom Punkt p ausgehend gezeichnet wurden).

(d) K ist die durch "Ausfüllen" von M entstehende Ellipse. Setzen wir $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, so ist $K = \{(x,y) \in U : \psi(x,y) \leq 0\}$ mit $\psi : U \to \mathbb{R}$, $\psi(x,y) := x^2 + 3y^2 - 4$ und $\nabla \psi(x,y) = (2x, 6y) \neq (0,0)$. Also ist K ein Kompaktum mit glattem Rand $\partial K = \{(x,y) \in U : \psi(x,y) = 0\} = M$. Wir haben oben bereits einen aus K hinaus weisenden Normalenvektor an der Stelle $p = (1,1)$ gefunden. Der gesuchte äußere Normalenvektor $\nu(p)$ entsteht aus vorigem Vektor durch Normieren:

$$\nu(p) \;=\; \frac{1}{\|(\frac{1}{3},1)\|_2}\left(\tfrac{1}{3},1\right) \;=\; \frac{3}{\sqrt{10}}\left(\tfrac{1}{3},1\right).$$

Aufgabe G41 (Kompakta mit glattem Rand)

Skizzieren Sie grob die Menge $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Finden Sie ∂K und zeigen Sie, dass K ein Kompaktum mit glattem Rand ist. **Lösung:** K ist ein Kreisring in der Ebene.

Offensichtlich ist $\partial K = S_1 \cup 2S_1$ die Vereinigung des Einheitskreises und des Kreises um $(0,0)$ mit Radius 2. Um jeden Randpunkt $p \in \partial K$ haben wir eine Funktion ψ wie in Definition 11.1 zu finden. Ist $p \in 2S_1$, so ist $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 > 1\}$ eine offene Umgebung von p und

$$\psi \colon U \to \mathbb{R}\,, \quad \psi(x,y) \;:=\; x^2 + y^2 - 4$$

eine C^1-Funktion derart, dass $K \cap U = \{(x,y) \in U : \psi(x,y) \leq 0\}$ und $\nabla \psi(x,y) = (2x,\, 2y) \neq (0,0)$ für alle $(x,y) \in U$ (also $\psi'(x,y) \neq 0$). Ist $p \in S_1$, so ist $V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x^2 + y^2 < 4\}$ eine offene Umgebung von p und

$$\theta \colon V \to \mathbb{R}\,, \quad \theta(x,y) \;:=\; 1 - x^2 - y^2$$

eine C^1-Funktion derart, dass $V \cap K = \{(x,y) \in V : \theta(x,y) \leq 0\}$ und $\nabla \theta(x,y) = (-2x,\, -2y) \neq (0,0)$ für alle $(x,y) \in V$. Also ist K tatsächlich ein Kompaktum mit glattem Rand.

Aufgabe G42 (Satz von Stokes)

Gegeben ist die Fläche G definiert durch $z = 1 - x^2 - y^2$ und $0 \leq z$. Finden Sie einen Weg $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ der den Rand ∂G der Fläche entgegen dem Uhrzeigersinn parametrisiert und berechnen Sie

$$\int_\gamma F(\vec{x}) \bullet d\vec{x}$$

für $F(x,y,z) = \left(\begin{smallmatrix} -y \\ x \\ z \end{smallmatrix}\right)$.

Lösung: Randpunkte der Fläche sind genau diejenigen Punkte wo $z = 0$ gilt. Wir erhalten also als Rand die Menge $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 = 1\}$. Diese wird offensichtlich durch den Wege

$$\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

entgegen dem Uhrzeigersinn parametrisiert. Also rechnen wir

$$\int_\gamma F(\vec{x}) \bullet d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \sin(t)^2 + \cos(t)^2 \, dt = 2\pi.$$

Aufgabe G43 (Extrema unter Nebenbedingungen)

Berechnen Sie die Extrema der Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$.

Lösung: Sei $q(x, y) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 1$. Es gilt $\nabla f(x, y) = (1, 1)$ und $\nabla q(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y)$. Seien $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x, y) - \lambda \nabla q(x, y) = 0$. Dann gelten

$$\begin{cases} I & : 1 - \lambda 2x = 0 \\ II & : 1 - \lambda \frac{1}{2} y = 0 \\ III & : x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $y \geq 0$. Aus III folgern wir $x^2 \leq 1$ und $y = 2\sqrt{1 - x^2}$. Nun folgt mit II $1 - \lambda\sqrt{1 - x^2} = 0$. Also $x^2 = 1 - \frac{1}{\lambda^2}$. Somit müssen $1 - \frac{1}{\lambda^2} \geq 0$ und $x = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}}$ gelten. Wir folgern mit I $1 \pm 2\lambda\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}} = 0$ und erhalten nach Auflösen $\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. Durch Einsetzen in die entsprechenden Gleichungen erhalten wir $(x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}})$.

Im Fall $y \leq 0$ erhalten wir analog $(x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}})$.

Da $M := q^{-1}(\{0\})$ kompakt ist und $f|_M$ stetig ist, muss f ein Maximum und ein Minimum auf M annehmen. Diese müssen aber auch lokale Extrema sein. Daher müssen die Maxima und Minima von der Form $(x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{4}{\sqrt{5}})$ sein. Einsetzen in f zeigt, dass $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}})$ das Maximum von f ist und $(x, y) = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}})$ das Minimum.