Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2014/15
20.10.2014

1. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Hausübungen

Aufgabe H1 (Verfaulende Vegetation; 3 Punkte)

Es sei $m(t)$ die Masse (in kg) der abgestorbenen Vegetation, die sich zur Zeit t auf einem gegebenen Quadratmeter eines tropischen Waldes befindet. Durch Fäulnis nimmt die Masse mit einer Rate proportional zu $m(t)$ ab. Zusätzlich kommt aber neuer “Abfall” hinzu, mit einer konstanten Rate.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung für m auf.
(b) Finden Sie druch “Trennung der Variablen”eine Lösung m der Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung $m(0) = m_0$. Hierbei ist m_0 die Ausgangsmasse und $\alpha < 0$ Ihre oben gewählte Proportionalitätskonstante.
(c) Ist die Lösung in (b) eindeutig?
(d) Wie verhält sich Ihre Lösung für $n \to \infty$? Hängt die Antwort von m_0 ab?

Lösung:

(a) Nach Annahme gibt es Zahlen $\alpha < 0$ und $c \geq 0$, so dass

$$\Delta m = \alpha m \Delta t + c\Delta t.$$

Dies liefert die Differentialgleichung

$$m' = \alpha m + c, m(0) = m_0.$$

(b) Wir lösen die Differentialgleichung mit der Formel aus Kapitel 2.1 (Satz 2.1) der Vorlesung für getrennte Variablen. Wir haben f als konstante Funktion $f(t) = 1$ und $g(m) = \alpha \cdot m + c$, die Differentialgleichung lautet also

$$m' = f(t) \cdot g(m) = \alpha \cdot m + c, \quad m(0) = m_0.$$

Die allgemeinen Stammfunktionen von f und $1/g$ sind

$$F(t) = t - t_0$$

und

$$H(m) = \frac{\ln(\alpha m + c)}{\alpha} - \frac{\ln(\alpha m_0 + c)}{\alpha}.$$

Durch Auflösen von $z = H(m)$ nach m erhält man die Umkehrfunktion

$$H^{-1}(z) = (e^{\alpha z + \ln(\alpha m_0 + c)} - c)/\alpha.$$

Die Lösung ϕ der Differentialgleichung ist

$$\phi(t) = H^{-1}(F(t)) = (e^{\alpha(t-t_0) + \ln(\alpha m_0 + c)} - c)/\alpha.$$

Der Ausdruck vereinfacht sich noch für $t_0 = 0$.

(c) Wegen der stetigen Differenzierbarkeit von f und g erfüllt das Produkt dieser beiden Funktionen eine lokale Lipschitzbedingung und die Lösung der Differentialgleichung ist somit eindeutig.

(d) Für $t \to \infty$ nähert sich wegen $\alpha < 0$ die Lösung $\phi(t)$ dem Wert $-c/\alpha \geq 0$ an, welcher unabhängig von m_0 ist.

Aufgabe H2 (Lutschen eines Bonbons; 3 Punkte)

Das Volumen $V(t)$ eines kugelförmigen Bonbons (vom Volumen V_0 beim Beginn des Lutschens zur Zeit $t = 0$) verringert sich beim Lutschen mit einer zeitlichen Rate, welche proportional zur vorhandenen Oberfläche ist.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung für V als Funktion der Zeit auf.
(b) Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung.
(c) Interpretieren Sie Ihre Lösung: Verschwindet das Bonbon nach einer gewissen Zeit? Können Sie die in der Lösung auftauchenden Konstanten durch Größen ersetzen, die für den Genießer des Bonbons direkt erfahrbar sind (wie z.B. V_0)? Kann Ihre Lösung für große t der Realität entsprechen? Wie sollte die Lösung sich dort verhalten? Gibt es eine Lösung der Differentialgleichung, die mit den Erfahrungen der Realität in Einklang steht?

Lösung: (a) Die Volumenänderung ΔV in einem kleinen Zeitintervall Δt ist näherungsweise proportional zu Δt und zur Fläche $A(t)$ des Bonbons, also

$$\Delta V \approx -KA(t)\Delta t$$

für eine Konstante $K > 0$. Teilen durch Δt führt auf

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \approx -KA(t)$$

und Grenzübergang $\Delta t \to 0$ schließlich auf die Formel

$$\frac{dV}{dt}(t) = -KA(t)\,. \tag{2}$$

Ist $r(t)$ der momentane Radius, so ist $V(t) = \frac{4\pi}{3}r(t)^3$ und $A(t) = 4\pi r(t)^2$. Einsetzen von $r(t) = (\frac{3V(t)}{4\pi})^{1/3}$ in die Formel für $A(t)$ führt auf

$$A(t) = 4\pi(\frac{3}{4\pi})^{2/3}V(t)^{2/3}.$$

Setzen wir dies nun in (2) ein, so erhalten wir die gesuchte Differentialgleichung,

$$\frac{dV}{dt}(t) = -K\,(\frac{3}{4\pi})^{2/3}\,V(t)^{2/3}\,. \tag{3}$$

(b) und (c): Teilen beider Seiten von (3) durch $V(t)^{2/3}$ – was nur für nicht-verschwindendes $V(t)$ erlaubt ist – führt auf

$$\frac{dV}{dt}(t)V(t)^{-2/3} = \left(\frac{d}{dt}3V^{1/3}\right)(t) = -K(\frac{3}{4\pi})^{2/3},$$

Bilden der Stammfunktionen beider Seiten weiter auf

$$3V(t)^{1/3} = C - K\,(\frac{3}{4\pi})^{2/3}t$$

mit einer Integrationskonstanten $C \in \mathbb{R}$. Da $V(0) = V_0 > 0$, ist übrigens $C = 3(V_0)^{1/3} > 0$. Auflösen nach $V(t)$ ergibt

$$V(t) = \left(\frac{1}{3}C - \frac{1}{3}K(\frac{3}{4\pi})^{2/3}t\right)^3 = \left(\frac{1}{3}C\right)^3 \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{K}{C}(\frac{3}{4\pi})^{2/3}}_{=:\tau^{-1}}t\right)^3,$$

was wir mit $C = 3(V_0)^{1/3}$ und $\tau > 0$ wie gerade definiert umschreiben können als

$$V(t) = V_0 \cdot (1 - \frac{t}{\tau})^3.$$

Beachten Sie, dass $V(t)$ für $t = \tau$ verschwindet. Da unsere Herleitung nur für $V(t) \neq 0$ gültig war, rechne der Leser $\frac{dV}{dt}(t)$ vorsichtshalber aus und setze es zur Probe in die Differentialgleichung ein – diese ist tatsächlich erfüllt (wenn wir $V^{2/3}$ als $(V^{1/3})^2$ interpretieren, somit auch Negatives einsetzen können). Allerdings ist, sobald $V(t) = 0$, die vorige Herleitung von V nicht mehr zwingend – auch andere Funktionsverläufe ab diesem Zeitpunkt könnten möglich sein, die ebenfalls die Differentialgleichung erfüllen. Beachten Sie, dass das von uns gefundene V ab $t = \tau$ sich unphysikalisch verhält, denn dann ist $V(t) < 0$, obwohl das Bonbon in der Realität natürlich kein negatives Volumen besitzen kann. Vielmehr sollte das Bonbon, sobald es zur Zeit $t = \tau$ verschwunden ist, einfach fort sein, d.h. von diesem Zeitpunkt ab einfach konstant das Volumen 0 haben. Weil $\frac{dV}{dt}(\tau) = 0$ ist, ist nun tatsächlich auch

$$W(t) := \begin{cases} V(t) & \text{falls } t \in [0, \tau] \\ 0 & \text{falls } t > \tau \end{cases}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Für $t \leq \tau$ erfüllt W die Differentialgleichung (3), weil V dies tut. Für $t \geq \tau$ haben wir $W(t) = \frac{dW}{dt}(t) = 0$, weswegen auch in diesem Zeitintervall (3) von W erfüllt ist. Es ist also auch W eine Lösung unserer Differentialgleichung, und zwar die physikalisch sinnvolle Lösung.

Aufgabe H3 (Eine Substitution; 3 Punkte)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Intervall und $g\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass eine differenzierbare Funktion $\phi\colon J \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ genau dann die Differentialgleichung $y' = g(\frac{y}{x})$ löst, wenn $\psi(x) := \frac{\phi(x)}{x}$ die Differentialgleichung $z' = \frac{1}{x}(g(z) - z)$ löst.

Anwendung: Lösen Sie $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$ mit $y(1) = 1$.

Lösung: Sei zunächst ϕ eine Lösung von $y' = g(y/x)$. Dann folgt

$$\psi'(x) = \phi'(x)/x - \phi(x)/x^2 = \frac{1}{x}g(\frac{\phi(x)}{x}) - \frac{\phi(x)}{x^2} = \frac{1}{x}(g(\psi(x)) - \psi(x)).$$

Also ist ψ Lösung von $z' = \frac{1}{x}(g(z)-z)$. Ist umgekehrt ψ eine Lösung von $z' = \frac{1}{x}(g(z)-z)$, so folgt

$$\phi'(x) = \psi(x) + x\psi'(x) = \psi(x) + g(\psi(x)) - \psi(x) = g(\frac{\phi(x)}{x}),$$

d. h. ϕ ist Lösung von $y' = g(y/x)$.

Für die Anwendung setzen wir $g(z) = z^2 + z$. Dann lautet die angegebene Differentialgleichung

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} = g(y/x).$$

Die Substitution von oben führt uns auf die Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z) = \frac{z^2}{x},$$

welche äquivalent ist zur Gleichung $\frac{z'}{z^2} = 1/x$. Kurzes Nachdenken erlaubt einem dies in der Form

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{x}$$

zu schreiben und man erhält schnell

$$z(x) = \frac{1}{c - \ln(x)}.$$

Mit dem ersten Teil der Aufgabe ist also

$$\phi(x) = x \cdot z(x) = \frac{x}{c - \ln(x)}$$

die allgemeine Lösung der angegebenen Differentialgleichung.

Modalitäten: Bitte geben Sie ihre Lösungen zu den Übungszetteln in ihrer jeweiligen Übungsgruppe ab.

Zur Vorlesung Reelle Analysis wird es eine Klausur geben. Wenn Sie die Klausur **bestehen** und mehr als 50% der Punkte in den Übungsaufgaben erreicht haben, erhalten Sie einen Bonus von einem Notenschritt (z.B. von 4,0 auf 3,7). Der Bonus hilft also nicht beim Bestehen der Klausur. Sollten Sie über 80% der Punkte aus den Übungsaufgaben erreicht haben, so bekommen Sie einen weiteren Notenschritt (also z.B. von 4,0 auf 3,3).

Im Falle von mündlichen Prüfungen (Master Lehramt) wird kein Bonus auf die Note angewendet.