Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2014/15
27.10.2014

2. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Hausübungen

Aufgabe H4 (Ein Lösungsintervall; 3 Punkte)

Es sei

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - 2| \leq 1, |y - 2| \leq 1\}.$$

Finden Sie ein konkretes $\varepsilon > 0$, so dass die Differentialgleichung $y' = xy$ auf dem Intervall $[2-\varepsilon, 2+\varepsilon]$ eine eindeutige Lösung mit Anfangswert $y(2) = 2$ besitzt. Nutzen Sie hierzu den quantitativen Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lidelöff.

Lösung: Wir betrachten den Punkt $(x_0, y_0) := (2, 2)$. Für $(x, y) \in G$ gilt $|f(x, y)| \leq (|x_0| + 1)(|y_0| + 1) = 9 =: M$. Wir setzen $r = R = 1$ in Satz 1.6 aus dem Skript und wählen $\varepsilon = \min(1, \frac{1}{M}) = \frac{1}{9}$.

Aufgabe H5 (Getrennte Variablen; 3 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf geeigneten Definitionsbereichen mit der im Beweis von Satz 2.1 angegebenen Formel.

(a) $y' = \frac{y^2}{x^2},\ y(x_0) = y_0$
(b) $y' = ay + c,\ y(x_0) = y_0,\ a, c \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Die Differentialgleichung ist von der Form $y' = f(x)g(y)$. Als Definitionsbereich wählen wir zunächst irgendeinen offenen Quadranten des $\mathbb{R}^2$. Insbesondere gelten $x_0, y_0 \neq 0$.
Stammfunktionen von $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und $\frac{1}{g(y)} = \frac{1}{y^2}$ sind $F(x) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}$ und $H(y) = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y}$. Die Umkehrfunktion $H^{-1}(z) = (\frac{1}{y_0} - z)^{-1}$ ist definiert für alle $z \neq 1/y_0$. Aus $y_0 \neq 0$ folgt

$$\frac{1}{x} \neq \frac{1}{x_0} - \frac{1}{y_0} \quad \forall x \in U := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

Also ist $y(x) = H^{-1}(F(z)) = (\frac{1}{y_0} - \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x})^{-1}$ für alle $x \in U$ definiert. Falls $\varepsilon > 0$ so klein gewählt ist, dass $0 \notin U$, dann ist $y(x)$ dort die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung.

(b) Wir dürfen nur Definitionsbereiche zulassen, für die die y-Variablen in Intervallen variieren, auf denen $g(y) = ay + c > 0$ gilt, d. h. g besitzt auf diesen Intervallen keine Nullstelle. Stammfunktion von $f(x) = 1$ (konstant) ist $F(x) = x - x_0$. Im eingeschränkten Definitionsbereich hat $\frac{1}{g}$ die Stammfunktion

$$H(y) = \frac{\ln(ay + c)}{\alpha} - \frac{\ln(ay_0 + c)}{\alpha}.$$

Für $ay + c \leq 0$ wäre dies nicht definiert. Durch Auflösen von $z = H(y)$ nach y erhält man die Umkehrfunktion

$$H^{-1}(z) = (e^{az+\ln(ay_0+c)} - c)/a.$$

Die Lösung y der Differentialgleichung ist also

$$y(x) = H^{-1}(F(x)) = (e^{a(x-x_0)+\ln(ay_0+c)} - c)/a.$$

Aufgabe H6 (Iterationsverfahren; 3 Punkte)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $y(x) = \cos(x)$ die eindeutige Lösung dieses Problems ist.

(b) Führen Sie die angegebene Differentialgleichung auf ein Anfangswertproblem erster Ordnung mit zwei Differentialgleichungen zurück.

(c) Führen Sie 4 Iterationsschritte nach Picard-Lindelöf durch, vermuten Sie eine Formel für den n-ten Iterationsschritt (ohne Beweis, d. h. es ist keine vollständige Induktion erforderlich) und erhalten Sie so die Lösung der anfänglichen Differentialgleichung. Stimmt diese Lösung mit der Lösung aus Aufgabenteil (a) überein?

Lösung:

(a) $y(x) = \cos(x)$ erfüllt sowohl die Differentialgleichung als auch das Anfangswertproblem.

(b) Die angegebene Differentialgleichung ist äquivalent zum System

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= -y_0 \end{aligned}$$

mit den Anfangswertproblemen $y_0(0) = 1$ und $y_0'(0) = 0$. Dann entspricht die Lösung y der anfänglichen Differentialgleichung der Lösung y_0 der umformulierten Aufgabe.

(c) Der Definitionsbereich der umgeschriebenen Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \end{pmatrix} = f(x, y_0, y_1) = \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_0 \end{pmatrix}$$

ist $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Der Anfangspunkt ist $x_0 = 0$ und der Anfangswert ist $(1,0)^T \in \mathbb{R}^2$. Wir beginnen mit $\phi_0(x) = (0,1)^T$ und iterieren mit der Vorschrift

$$\phi_{n+1}(x) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \int_0^x f(t,\phi_n(t))dt.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} dt &&= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-x\end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix}1\\-x\end{pmatrix},\\
\phi_2(x) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix}-t\\-1\end{pmatrix} dt &&= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{x^2}{2}\\-x\end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix}1-\frac{x^2}{2}\\-x\end{pmatrix},\\
\phi_3(x) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix}-t\\-1+\frac{t^2}{2}\end{pmatrix} dt &&= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{x^2}{2}\\-x+\frac{x^3}{6}\end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix}1-\frac{x^2}{2}\\-x+\frac{x^3}{6}\end{pmatrix},\\
\phi_4(x) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix}-t+\frac{t^3}{6}\\-1+\frac{t^2}{2}\end{pmatrix} dt &&= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\\-x+\frac{x^3}{6}\end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix}1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\\-x+\frac{x^3}{6}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die obigen Formeln lassen uns

$$\phi_{2n}(x) = \begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\\-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{pmatrix} \text{ und } \phi_{2n+1}(x) = \begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\\-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{pmatrix}$$

vermuten. Für $n = 0$ stimmt die Formel offensichtlich und falls sie für ϕ_{2n} gezeigt ist, so folgen nach einigen Rechenschritten

$$\phi_{2n+1}(x) = \begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\\-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{pmatrix} \text{ und } \phi_{2(n+1)}(x) = \begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\\-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{pmatrix}.$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir die Lösung

$$\phi(x) = \begin{pmatrix}y_0(x)\\y_1(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\\-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(x)\\-\sin(x)\end{pmatrix},$$

so dass $y(x) = y_0(x) = \cos(x)$ mit Aufgabenteil (a) übereinstimmt.