Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2014/15
03.11.2014

3. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Hausübungen

Aufgabe H7 (Lineare DGL; 3 Punkte)

Für den zeitlichen Verlauf der Stromstärke $i(t)$ in einem elektrischen Stromkreis mit Induktivität $L > 0$, Ohmschen Widerstand $R > 0$ und anliegender Wechselspannung $U(t)$ zum Zeitpunkt t gilt

$$L \cdot i' + R \cdot i = U.$$

Bestimmen Sie $i(t)$ für $U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$, wobei $i(0) = 0$. (Dabei bezeichne ω die Wechselspannungsfrequenz, U_0 die Amplitude.)

Lösung: Das zu lösende AWP lautet

$$i' + R/Li = U/L, \ \ i(0) = 0.$$

Die eindeutig bestimmte Lösung ist also

$$i(t) = \frac{U_0}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \int_0^t sin(\omega t) e^{\frac{R}{L}s} ds.$$

Das Integral berechnet man mit zweimaliger partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\int_0^t sin(\omega t) e^{\frac{R}{L}s} ds &= \frac{L}{R} \sin(\omega t) e^{\frac{R}{L}t} - \frac{L\omega}{R} \cdot \int_0^t \cos(\omega x) e^{\frac{R}{L}x} dx \\
&= \frac{L}{R} \left(\sin(\omega t) e^{\frac{R}{L}t} - \frac{L\omega}{R} \cdot \left(\cos(\omega t) e^{\frac{R}{L}t} - 1 \right) \right) - \frac{L^2\omega^2}{R^2} \int_0^t \sin(\omega s) e^{\frac{R}{L}s} ds.
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$i(t) = \frac{U_0 L}{L^2\omega^2 + R^2} \cdot \left(\frac{R}{L} \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t) + \omega e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Aufgabe H8 (Charakteristisches Polynom einer Differentialgleichung; 3 Punkte)

Finden Sie reelle (!) Lösungsfundamentalsysteme der homogenen linearen Differentialgleichungen

(a) $y'''' + y = 0$,
(b) $y'''' - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$.

Hinweis zu (a): Auch die komplexe Zahl $\sqrt{i}$ besitzt eine Darstellung $a+ib$ mit $a,b \in \mathbb{R}$.

Lösung: (a) Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die komplexen Zahlen

(1) $\sqrt{i} = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}i$,

(2) $-\sqrt{i} = -\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}i$

und deren konjugiert-komplexe Zahlen

(3) $-\sqrt{-i} = \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}i$,

(4) $\sqrt{-i} = -\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}i$.

Mit $\alpha = \beta = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist ein Lösungsfundamentalsystem gegeben durch die Funktionen $y_{1,2}(x) = e^{\pm\alpha}\cos(\beta x)$, $y_{3,4}(x) = e^{\pm\alpha}\sin(\beta x)$.
(b) Vierfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist $\lambda = 1$. Ein Lösungsfundamentalsystem ist damit gegeben durch die Funktionen $y_j(x) = x^j e^x$, $j = 0, 1, 2, 3$.

Aufgabe H9 (Matrixexponentialfunktion; 3 Punkte)

Beweisen Sie, dass für jede quadratische reelle oder komplexe Matrix A gilt

$$\det e^A = e^{\mathrm{Spur}(A)}.$$

Hinweis: Bekannte Tatsachen aus der Linearen Algebra wie etwa Aussagen über Jordan-Normalform, Invarianz der Spur unter Basistransformationen, Determinantenproduktsatz etc. dürfen ohne Beweis benutzt werden. Kapitel 4 der Vorlesung darf benutzt werden.

Lösung: Es sei A in Jordan-Normalform $A = S^{-1}JS$ gegeben, wobei S eine invertierbare Matrix ist und

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}$$

eine Blockdiagonalmatrix mit Jordanblöcken

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

der Dimension d_k und Eigenwerten $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \cdots r$, ist. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\det e^A &= \det e^{S^{-1}JS} = \det S^{-1} e^J S \\
&= \det e^J = \det \begin{pmatrix} e^{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_r} \end{pmatrix} \\
&= \det e^{J_1} \cdots \det e^{J_r} = e^{d_1\lambda_1} \cdots e^{d_r\lambda_r} \\
&= e^{d_1\lambda_1 + \cdots + d_r\lambda_r} \\
&= e^{\mathrm{Spur(J)}} \\
&= e^{\mathrm{Spur(A)}}.
\end{aligned}$$