Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2014/15

10.11.2014

4. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Hausübungen

Aufgabe H10 (DGL höherer Ordnung; 3 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung (1) aus G9. Geben Sie nun die allgemeine Lösung von (1) unter der Bedingung $\omega_0 = \omega$ an. Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$. Unterscheidet sich das Verhalten im Vergleich zu Aufgabe G10?

Lösung: Wir betrachten die Lösung zu G10 und beobachten, dass $i\omega$ eine Nullstelle erster Ordnung des charakteristischen Polynoms ist (da $\omega = \omega_0$). Wir machen also den Ansatz $\psi(t) := e^{i\omega t}(c_1 t + c_0)$ und erhalten

$$\psi'(t) = e^{i\omega t} i(i\omega c_1 t + c_0 i\omega_0 + c_1)\text{und}$$
$$\psi''(t) = e^{i\omega t}(-\omega^2 c_1 - c_0\omega^2 + i\omega c_1 + c_1 i\omega_0)$$

Also erhalten wir

$$P(D)\psi(t) = 2ic_1\omega e^{i\omega t}.$$

Folglich erhalten wir als spezielle Lösung von (2)

$$\tilde{\psi}(t) = \frac{1}{2\omega} t \sin(\omega t).$$

Die allgemeine Lösung zu (2) ergibt sich nun zu $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \tilde{\psi}$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H11 (Spur einer σ-Algebra auf einer messbaren Menge; 3 Punkte)

Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine Messraum und $Y \in \mathcal{S}$. Zeigen Sie, dass die Spur von $\mathcal{S}$ auf Y gegeben ist durch

$$\mathcal{S}|_Y \;=\; \{A \in \mathcal{S} \colon A \subseteq Y\}\,.$$

Insbesondere gilt also $\mathcal{S}|_Y \subseteq \mathcal{S}$, wenn $Y \in \mathcal{S}$.

Lösung: Wir setzen $\mathcal{T} := \{A \in \mathcal{S} \colon A \subseteq Y\}$.

$\mathcal{S}|_Y \subseteq \mathcal{T}$: Ist $B \in \mathcal{S}|_Y$, so existiert eine Menge $A \in \mathcal{S}$ mit $B = A \cap Y$. Da $Y \in \mathcal{S}$ und $\mathcal{S}$ als σ-Algebra abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten ist, ist $B = A \cap Y \in \mathcal{S}$. Also $B \in \mathcal{S}$ und $B \subseteq Y$, somit $B \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}|_Y$: Ist $B \in \mathcal{T}$, so ist $B \in \mathcal{S}$ und $B \subseteq Y$, somit $B = B \cap Y \in \mathcal{S}|_Y$.

Aufgabe H12 (Borelsche Teilmengen von $\mathbb{R}$; 3 Punkte)

Wir betrachten die von der Menge $\mathcal{O}$ aller offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{O})$ auf $\mathbb{R}$. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Borelmenge*, wenn $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass jede der folgenden Mengen eine Borelmenge ist:

$$]0,1[\,, \qquad [0,1]\,, \qquad [0,1[\,, \qquad \{0\}\,, \qquad \mathbb{Q}\,.$$

Lösung: $]0,1[$ ist offen, somit eine Borelmenge.

$[0,1]$ ist abgeschlossen, hat also offenes Komplement $U := [0,1]^c$. Somit $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und somit $[0,1] = U^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, da $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ als σ-Algebra abgeschlossen unter Komplementen ist.

$[0,1[= \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\frac{1}{n}, 1[$ ist ein abzählbarer Durchschnitt von Borelschen (da offenen) Mengen und somit eine Borelmenge (denn $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ is als σ-Algebra abgeschlossen unter abzählbaren Durchschnitten).

$\{0\}$ ist abgeschlosssen und somit eine Borelmenge (s.o.)

$\mathbb{Q}$ ist eine abzählbar unendliche Menge, wir finden also eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto q_n$. Dann ist $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{q_n\}$ eine abzählbare Vereinigung einpunktiger (und somit nach dem Vorigen Borelscher) Mengen und somit eine Borelmenge (da $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ als σ-Algebra abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen ist).