Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2014/15
17.11.2014

5. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Hausübungen

Aufgabe H13 (Urbilder von Mengen; 3 Punkte)

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(a) $f^{-1}(Y) = X$ und $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(b) Sind $A \subseteq Y$ und $B \subseteq Y$ disjunkt, so sind auch $f^{-1}(A)$ und $f^{-1}(B)$ disjunkt.

(c) Ist Y ein kartesisches Produkt $Y = Y_1 \times Y_2$, $f = (f_1, f_2)$ mit den Komponenten $f_j\colon X \to Y_j$ und sind $A_1 \subseteq Y_1$ und $A_2 \subseteq Y_2$ Teilmengen, so ist

$$f^{-1}(A_1 \times A_2) \;=\; f_1^{-1}(A_1) \cap f_2^{-1}(A_2)\,.$$

Lösung:

(a) Für jedes $x \in X$ ist $f(x) \in Y$, somit $x \in f^{-1}(Y) \subseteq X$. Also $f^{-1}(Y) = X$. Es ist $f^{-1}(\emptyset) = \{x \in X : \underbrace{f(x) \in \emptyset}_{\text{nie erfüllt}}\} = \emptyset$.

(b) Ist $x \in f^{-1}(A)$, so ist $f(x) \in A$, somit $f(x) \notin B$ (da $A \cap B = \emptyset$), somit $x \notin f^{-1}(B)$. Folglich $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$.

(c) Wir rechnen:

$$x \in f^{-1}(A_1 \times A_2) \Leftrightarrow f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in A_1 \times A_2 \Leftrightarrow (f_1(x) \in A_1 und f_2(x) \in A_2)$$
$$\Leftrightarrow (x \in f_1^{-1}(A_1) und x \in f_2^{-1}(A_2)) \Leftrightarrow x \in f_1^{-1}(A_1) \cap f_2^{-1}(A_2).$$

Aufgabe H14 (Erzeugendensysteme für $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$; 3 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 1.15:

(a) Die Menge $\mathcal{E} := \{\,]a,b[\colon a,b \in \mathbb{Q}^n \text{ mit } a_k < b_k \text{ für } k = 1,\ldots,n\}$ aller offenen Quader mit rationalen Eckpunkten ist ein Erzeugendensystem für die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{E})$.

(b) Auch die Menge $\mathcal{F}$ aller halboffenen Quader erzeugt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Lösung: (a) Offensichtlich gilt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und somit $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Setze $e := (1,1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^n$. Da $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{O})$ mit $\mathcal{O} := \{U \subseteq \mathbb{R}^n : U \text{ ist offen}\}$, müssen wir für $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ nur zeigen, dass $U \in \sigma(\mathcal{E})$ für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Da U offen ist, finden wir für jeden Punkt $x \in U$ ein $\vee > 0$ mit $]x - \vee e, x + \vee e[\; \subseteq U$. Für $k = 1,\ldots,n$ wählen wir rationale Zahlen $a_k \in\;]x_k - \vee, x_k[$ und $b_k \in\;]x_k, x_k + \vee[$. Dann ist $]a,b[\; \subseteq\;]x - \vee e, x + \vee e[\; \subseteq U$. Folglich ist U die Vereinigung aller in U enthaltenen offenen Quader mit rationalen Eckpunkten. Da es nur abzählbar viele solche Quader gibt und jeder ein Element von $\sigma(\mathcal{E})$ ist, ist auch die abzählbare Vereinigung U in $\sigma(\mathcal{E})$, wie benötigt.

(b) Da $[a,b[=\bigcap_{j=1}^{\infty}]a-\frac{1}{j}e,b[$, ist $[a,b[\in\sigma(\mathcal{E})$ für jeden halboffenen Quader, also $\mathcal{F}\subseteq\sigma(\mathcal{E})$ und somit $\sigma(\mathcal{F})\subseteq\sigma(\mathcal{E})=\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Da $]a,b[=\bigcup_{j=1}^{\infty}[a+\frac{1}{j}e,b[$, ist $]a,b[\in\sigma(\mathcal{F})$ für jeden offenen Quader, also $\mathcal{E}\subseteq\sigma(\mathcal{F})$ und somit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)=\sigma(\mathcal{E})\subseteq\sigma(\mathcal{F})$.
Also gilt $\sigma(\mathcal{F})=\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe H15 (Messbar oder nicht?)

Ist die folgende Funktion $f\colon(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ?

$$f(x)\;:=\;\begin{cases}1/x & \text{für } x\neq 0;\\ 0 & \text{für } x=0\end{cases}$$

[Hinweis: Wegen Satz 1.25 brauchen Sie nur Urbilder offener Mengen zu betrachten].

Lösung: Nach dem in Anschluss an Satz 1.25 diskutierten Spezialfall ist f genau dann messbar, wenn $f^{-1}(W)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ für jede offene Menge $W\subseteq\mathbb{R}$. Sei also $W\subseteq\mathbb{R}$ offen. Da die Einschränkung $f|_{\mathbb{R}^\times}:\mathbb{R}^\times\to\mathbb{R}$ stetig ist, ist $(f|_{\mathbb{R}^\times})^{-1}(W)=f^{-1}(W)\cap\mathbb{R}^\times$ offen in $\mathbb{R}^\times$ und somit offen in $\mathbb{R}$, da $\mathbb{R}^\times:=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ offen in $\mathbb{R}$ ist.[1] Somit $f^{-1}(W)\cap\mathbb{R}^\times\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Die einpunktige Menge $\{0\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$ und daher eine Borelmenge. Also ist auch

$$f^{-1}(W)=(f^{-1}(W)\cap\mathbb{R}^\times)\,\cup\,(f^{-1}(W)\cap\{0\})=\begin{cases}f^{-1}(W)\cap\mathbb{R}^\times & \text{falls } 0\notin W\\ (f^{-1}(W)\cap\mathbb{R}^\times)\,\cup\,\{0\} & \text{falls } 0\in W\end{cases}$$

eine Borelmenge.

[1] Hier geht ein, dass die offenen Teilmengen U von $\mathbb{R}^\times$ von der Form $U=\mathbb{R}^\times\cap V$ sind, wobei V offen in $\mathbb{R}$ ist. Also ist U offen in $\mathbb{R}$.