Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2014/15
01.12.2014

7. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Hausübungen

Aufgabe H19 (Approximation durch Stufenfunktionen)

Im Beweis von Satz 3.4 wurden gewisse Stufenfunktionen s_n definiert, mit denen man eine nicht-negative messbare Funktionen approximieren kann.

(a) Berechnen Sie s_1 für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$; skizzieren Sie f, s_1 und s_2.

(b) Skizzieren Sie f und s_1 für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1 + \cos(x)$.

Lösung: (a) Es ist

$$s_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |x| < \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & \text{falls } \sqrt{2} \le |x| < 1 \\ 1 & \text{falls } |x| \ge 1. \end{cases}$$

Weiter ist

$$s_2(x) = \begin{cases} \frac{k}{4} & \text{falls } \frac{\sqrt{k}}{2} \le |x| < \frac{\sqrt{k+1}}{2} \text{ mit } k \in \{0, 1, \ldots, 7\} \\ 2 & \text{falls } |x| \ge \sqrt{2}. \end{cases}$$

(b) Die Funktion f (und also auch s_1) ist 2π-periodisch. Für $x \in [-\pi, \pi]$ gilt:

$$s_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| \le \frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2} & \text{falls } \frac{\pi}{2} < |x| \le \frac{2}{3}\pi \\ 0 & \text{falls } |x| \in \,]\frac{2}{3}\pi, \pi]. \end{cases}$$

Aufgabe H20 (Noch verzwicktere Teilmengen)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die Menge aller Zahlen im Intervall $[0, 1[$, deren Dezimalbruchentwicklung bis zur Stelle n höchstens eine 4 enthält.

Es sei B die Menge aller Zahlen im Intervall $[0, 1[$, deren Dezimalbruchentwicklung mindestens zwei Vieren enthält.

Zeigen Sie, dass A_n und B Borelmengen sind und berechnen Sie das Lebesgue-Borel-Maß von A_n und B.

Lösung: Für $n \in \mathbb{N}$ sei J_n die Menge aller n-Tupel $(d_1, \ldots, d_n)$ aus Ziffern $d_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ derart, dass höchstens eine der Ziffern eine 4 ist. Da es 9^n verschiedene

n-Tupel ohne eine 4 gibt und $n \cdot 9^{n-1}$ verschiedene n-Tupel mit genau einer 4, ist J_n eine Menge mit $9^n + n9^{n-1}$ Elementen. Es ist

$$A_n \;=\; \bigcup_{(d_1,\ldots,d_n)\in J_n} \big[0.d_1 \cdots d_n,\; 0.d_1 \cdots d_n + 10^{-n}\big[\,.$$

Als endliche Vereinigung halboffener Intervalle ist A_n eine Borelmenge. Da die beteiligten Intervalle paarweise disjunkt sind, folgt

$$\lambda(A_n) \;=\; \sum_{(d_1,\ldots,d_n)\in J_n} \lambda\big([0.d_1 \cdots d_n,\; 0.d_1 \cdots d_n + 10^{-n}[\big) \;=\; (9^n + n9^{n-1}) \cdot 10^{-n}\,.$$

Es ist $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ die Menge aller Zahlen in $[0,1[$, deren Dezimalbruchentwicklung höchstens eine 4 enthält; da $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ und $\lambda(A_1) < \infty$, folgt

$$\lambda(A) \;=\; \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} (9^n + n9^{n-1}) \cdot 10^{-n} \;=\; 0\,.$$

Man beachte, dass $B = [0,1[\,\setminus A$. Somit

$$\lambda(B) \;=\; \lambda([0,1[) - \lambda(A) \;=\; 1 - 0 \;=\; 1\,.$$

Aufgabe H21 (Dies und das)

(a) Es sei ζ das Zählmaß auf $\mathbb{R}$. Für die Mengen $A_n :=]0, \frac{1}{n}[$ gilt offensichtlich

$$A_1 \;\supseteq\; A_2 \;\supseteq\; A_3 \;\supseteq \cdots\,.$$

Berechnen Sie $\zeta(A_n)$. Berechnen und vergleichen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \zeta(A_n) \qquad \text{und} \qquad \zeta\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\,.$$

Ist dies ein Widerspruch zu Lemma 2.4 (d)?

(a) Wir statten $\overline{\mathbb{R}}$ mit der Topologie aus, deren Basis gegeben ist durch Mengen der Form

$$]a,b[,\;\; [-\infty, a[,\;\;]b,\infty]$$

für $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie, dass diese Basis die gleichen Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$ erzeugt wie die Metrik aus Aufgabe G17.

Lösung:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist A_n eine unendliche Menge und somit $\zeta(A_n) = \infty$. Jedoch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]0, 2^{-n}[= \emptyset$, somit $\zeta(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \zeta(\emptyset) = 0$. Also

$$\lim_{n\to\infty} \zeta(A_n) \;=\; \infty \;\neq\; 0 \;=\; \zeta\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)\,.$$

Da $\zeta(A_1) = \infty$, ergibt sich kein Widerspruch zu Lemma 2.4 (d).

(b) Wir nutzen die Notation aus Aufgabe G17. Für $x \in \overline{\mathbb{R}}$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$B_\varepsilon^d(x) = \{y \in \overline{\mathbb{R}} : |f(y) - f(x)| < \varepsilon\} = f^{-1}\left(B_\varepsilon^{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(f(x))\right)$$

Lässt man x und ε laufen so bilden die Mengen $B_\varepsilon^d(x)$ eine Basis der von d induzierten Topologie.
Seien nun $a < b \in \mathbb{R}$. Wir setzten $\varepsilon := \frac{f(b)-f(a)}{2}$ und $x := f^{-1}(\varepsilon + f(a))$. Es gilt

$$]a, b[= f^{-1}(]f(a), f(b)[) = f^{-1}\left(B_\varepsilon^{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(f(x))\right)$$

Setzen wir $\varepsilon := \frac{\pi}{2} - f(b) + 1$ so gilt

$$]b, \infty] = f^{-1}(]f(b), \frac{\pi}{2}]) = f^{-1}\left(B_\varepsilon^{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(f(b))\right)$$

Setzen wir $\varepsilon := f(a) - \frac{\pi}{2} + 1$ so gilt

$$[\infty, a[= f^{-1}([-\frac{\pi}{2}, f(a)[) = f^{-1}\left(B_\varepsilon^{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(f(a))\right)$$

Dies zeigt direkt, dass die von d induzierte Topologie feiner ist als die in der Aufgabenstellung konstruierte. Analog sieht man, dass man jede der Kugeln

$$f^{-1}\left(B_\varepsilon^{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(f(x))\right)$$

als eine Basismenge aus der Aufgabenstellung schreiben kann. Es folgt die Aussage.