Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2014/15

15.12.2014

9. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Hausübungen

Aufgabe H25 (Translationsinvarianz des Lebesgue-Borel-Maßes; 3 Punkte)

Es sei λ das Lebesgue-Borel-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Wir wollen sehen, dass

$$\lambda(x + A) \;=\; \lambda(A) \qquad \text{für jede Borelmenge } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n);$$

hierbei ist $x + A := \{x + a \colon a \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mu \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty[$, $\mu(A) := \lambda(x + A)$ ein Maß ist.

(b) Berechnen Sie $\mu([a, b[)$ für halboffene Quader $[a, b[$, wobei $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a_k < b_k$.

(c) Schließen Sie aus der Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel Maßes, dass $\mu = \lambda$.

Lösung: (a) Es ist $\mu(x+\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Nun sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $y \mapsto x + y$ eine injektive Abbildung ist, sind dann auch die Mengen $x + A_k$ paarweise disjunkt; weiter gilt $x + \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(x + A_k)$. Somit

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \;=\; \lambda\Big(x + \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \;=\; \lambda\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(x + A_k)\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(x + A_k) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\,.$$

Also ist μ ein Maß.

(b) Da $x + [a, b[= [x + a, x + b[$, ist

$$\mu([a,b[) \;=\; \lambda(x+[a,b[) \;=\; \lambda([x+a,x+b[) \;=\; \prod_{k=1}^{n}((x_k+b_k)-(x_k+a_k)) \;=\; \prod_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\,.$$

(c) Nach (a) und (b) ist μ ein Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, welches jedem halboffenen Quader sein natürliches Volumen zuordnet. Aufgrund der Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel-Maßes (Satz 2.5 (a)) ist also $\mu = \lambda$.

Aufgabe H26 (Translationsinvariante Maße auf $\mathbb{R}$; 3 Punkte)

(a) Es sei $\mu \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty[$ ein translationsinvariantes Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $\mu([0, 1[) < \infty$. Zeigen Sie, dass μ ein Vielfaches des Lebesgue-Borel-Maßes ist:

$$\mu \;=\; c \cdot \lambda \qquad \text{mit } c := \mu([0, 1[)\,.$$

Anleitung: Drücken Sie $\mu([0, \frac{1}{2}[)$ und $\mu([\frac{1}{2}, 1[)$ duch $c := \mu([0, 1[)$ aus. Was ist $\mu([x, x + \frac{1}{2}[)$ für $x \in \mathbb{R}$? Was ist $\mu([x, x + 2^{-m}[)$? Was ist $\mu([a, b[)$ für $a < b$?

(b) Zeigen Sie, dass das Zählmaß $\zeta\colon (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \to [0, \infty]$ ein translationsinvariantes Maß ist, aber kein Vielfaches des Lebesgue-Borel-Maßes. Warum widerspricht dies nicht Aufgabenteil (a) ?

Lösung: (a) Wegen der Translationsinvarianz von μ ist gilt $\mu([0, \frac{1}{2}[) = \mu([\frac{1}{2}, 1[)$. Da $[0, 1[= [0, \frac{1}{2}[\cup [\frac{1}{2}, 1[$, wobei die zwei Intervalle disjunkt sind, folgt

$$\mu([0, 1[) \;=\; \mu([0, \tfrac{1}{2}[) + \mu([\tfrac{1}{2}, 1[) \;=\; 2\mu([0, \tfrac{1}{2}[)\,.$$

Es ist also $\mu([0, \frac{1}{2}[) = \frac{1}{2}\mu([0, 1[) = \frac{1}{2}c$ und somit $\mu([x, x + \frac{1}{2}[)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wegen der Translationsinvarianz. Wiederholung des Arguments zeigt, dass

$$\mu([x, x + 2^{-m}[) \;=\; 2^{-m}c \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \text{ und } x \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

Sind nun $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ beliebig, so setzen wir $k_m := [a2^m]$ und $\ell_m := [b2^m] + 1$. Dann gilt $a \in [k_m 2^{-m}, k_m 2^{-m} + 2^{-m}[$ und $b \in [\ell_m 2^{-m} - 2^{-m}, \ell_m 2^{-m}[$, insbesondere also

$$|a - k_m 2^{-m}| \;<\; 2^{-m} \qquad \text{und} \qquad |b - \ell_m 2^{-m}| \;<\; 2^{-m}\,. \tag{2}$$

Da $([k_m 2^{-m}, \ell_m 2^{-m}[)_{m\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von Borelmengen endlichen Maßes ist, mit Durchschnitt $[a, b]$, folgt

$$\mu([a, b]) \;=\; \lim_{m\to\infty} \mu([k_m 2^{-m}, \ell_m 2^{-m}[) \;=\; \lim_{m\to\infty} (\ell_m - k_m)2^{-m}c \;=\; c \cdot (b - a)$$

unter Benutzung von (2). Insbesondere ist also $\mu(\{b\}) = \mu([b, b]) = c \cdot (b - b) = 0$ und somit $\mu([a, b[) = \mu([a, b]) = c \cdot (b - a) = c\lambda([a, b[)$ im Falle $a < b$.

Ist $c = 0$, so ist $\mu(\mathbb{R}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu([n, n + 1[) = 0$ und somit $\mu = 0 = 0\lambda$ (wegen der Monotonie des Maßes μ).

Ist $c \neq 0$, so ist $c^{-1}\mu$ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $c^{-1}\mu([a, b[) = \lambda([a, b[)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und somit $c^{-1}\mu = \lambda$ wegen der Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel-Maßes (Satz 2.5 (a)). Also ist $\mu = c\lambda$.

(b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Translation $\tau_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tau_x(y) := x + y$ eine Bijektion. Daher haben A und $x + A = \tau_x(A)$ für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ gleich viele Elemente und somit ist $\zeta(A) = \zeta(x + A)$. Also ist ζ translationsinvariant. Da $\zeta(\{0\}) = 1$ aber $\lambda(\{0\}) = 0$, kann ζ kein Vielfaches von λ sein.

Natürlich ist unser Ergebnis kein Widerspruch zu (a), weil $\zeta([0, 1[) = \infty$.

Aufgabe H27 (Vervollständigung von Maßräumen; 3 Punkte)

Ist $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, so sei $\tilde{\mathcal{S}}$ die Menge aller Teilmengen $A \subseteq X$ der Gestalt $A = B \cup N$, wobei $B \in \mathcal{S}$ und $N \subseteq X$ eine μ-Nullmenge ist (siehe **4.6** im Skript).

(a) Zeigen Sie, dass $\tilde{\mathcal{S}}$ eine σ-Algebra auf X ist, mit $\mathcal{S} \subseteq \tilde{\mathcal{S}}$.

(b) Ist $A \in \tilde{\mathcal{S}}$, so existiert ein $B \in \mathcal{S}$ und eine μ-Nullmenge $N \subseteq X$ mit $A = B \cup N$. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{\mu}(A) \ := \ \mu(B) \tag{3}$$

unabhängig von der Wahl von B und N ist, also eine Abbildung $\tilde{\mu} : \tilde{\mathcal{S}} \to [0, \infty]$ durch (3) wohldefiniert ist. Zeigen Sie, dass $\tilde{\mu}$ ein Maß ist und $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{S}$.

(c) Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $N \subseteq X$ genau dann eine μ-Nullmenge ist, wenn N eine $\tilde{\mu}$-Nullmenge ist.

Lösung: (a) Für jedes $A \in \mathcal{S}$ gilt $A = A \cup \emptyset$, wobei $\emptyset$ eine μ-Nullmenge ist; somit $A \in \mathcal{S}$. Es gilt also $\mathcal{S} \subseteq \tilde{\mathcal{S}}$ und somit insbesondere $\emptyset \in \mathcal{S} \subseteq \tilde{\mathcal{S}}$.

Abgeschlossenheit unter abzählbaren Vereinigungen: Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen $A_n \in \tilde{\mathcal{S}}$, so gibt es Mengen $B_n \in \mathcal{S}$ und μ-Nullmengen N_n derart, dass $A_n = B_n \cup N_n$. Dann ist $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \tilde{\mathcal{S}}$, denn es ist $A = B \cup N$, wobei $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{S}$ und $N := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$ nach Vorigem eine μ-Nullmenge ist als abzählbare Vereinigung von μ-Nullmengen.

Abgeschlossenheit unter Komplementen: Ist $A \in \tilde{\mathcal{S}}$, so gibt es $B \in \mathcal{S}$ und eine μ-Nullmenge N mit $A = B \cup N$. Per Definition von Nullmengen gibt es weiter eine messbare Menge $M \in \mathcal{S}$ vom Mass $\mu(M) = 0$, mit $N \subseteq M$. Dann ist $A \subseteq B \cup M \in \mathcal{S}$. Da $B \subseteq A$, folgt $A = (B \cup M) \setminus (M \setminus A)$. Somit $A^c = (B \cup M)^c \cup (M \setminus A)$. Hierbei ist $(B \cup M)^c \in \mathcal{S}$ als Komplement einer messbaren Menge und $M \setminus A$ eine Nullmenge als Teilmenge von M. Also ist $A^c \in \tilde{\mathcal{S}}$.

(b) Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von B und N. Ist nämlich auch $C \in \mathcal{S}$ und M eine μ-Nullmenge mit $A = C \cup M$, so gibt es messbare Mengen $N', M' \in S$ vom Maß 0 mit $N \subseteq N', M \subseteq M'$. Wir haben $B \subseteq A = C \cup M \subseteq C \cup M'$ und somit

$$\mu(B) \leq \mu(C \cup M') \leq \mu(C) + \mu(M') = \mu(C).$$

Analog sieht man $\mu(C) \leq \mu(B)$, so dass $\mu(B) = \mu(C)$. Durch (3) ist $\tilde{\mu}$ also wohldefiniert. Gegeben $A \in \mathcal{S}$ ist $A = A \cup \emptyset$ eine Zerlegung von A in eine Menge aus $\mathcal{S}$ und eine Nullmenge, somit $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$. Es ist also $\tilde{\mu}$ eine Fortsetzung von μ. Insbesondere gilt $\tilde{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Menge paarweise disjunkter Mengen $A_n \in \tilde{\mathcal{S}}$, so finden wir Mengen $B_n \in \mathcal{S}$ und μ-Nullmengen N_n mit $A_n = B_n \cup N_n$. Dann ist $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = B \cup N$ mit $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{S}$ und $N := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$. Nach Vorigem ist N eine Nullmenge. Da wegen $B_n \cap B_m \subseteq A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$ die Mengen B_n paarweise disjunkt sind, erhalten wir:

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n) \,.$$

Als σ-additive Funktion mit $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$ ist $\tilde{\mu}$ ein Maß.

(c) Ist $N \subseteq X$ eine μ-Nullmenge, so existiert $A \in \mathcal{S}$ mit $N \subseteq A$ und $\mu(A) = 0$. Dann ist

$A \in \tilde{\mathcal{S}}$ und $\tilde{\mu}(A) = \mu(A) = 0$, somit N auch eine $\tilde{\mu}$-Nullmenge. Ist umgekehrt $N \subseteq X$ eine $\tilde{\mu}$-Nullmenge, so existiert eine Menge $M \subseteq \tilde{\mathcal{S}}$ mit $N \subseteq M$ und $\tilde{\mu}(M) = 0$. Per Definition von $\tilde{\mathcal{S}}$ und $\tilde{\mu}$ existiert eine Menge $A \in \mathcal{S}$ und eine μ-Nullmenge $L \subseteq X$ mit $M = A \cup L$ und $\mu(A) = \tilde{\mu}(M) = 0$. Als Vereinigung zweier μ-Nullmengen ist also auch $M = A \cup L$ eine μ-Nullmenge und als Teilmenge einer μ-Nullmenge ist dann auch $N \subseteq M$ eine μ-Nullmenge.