

10. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Hausübungen

Aufgabe H28 (Transformationsformel für ebene Polarkoordinaten)

Berechnen Sie das Integral $\int_B f \, d\lambda_2$ mit:

- (a) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \text{ und } y > 0\}$ und $f(x, y) := \frac{2xy}{x^2 + y^2}$;
 (b) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ und $f(x, y) := \sin(x^2 + y^2)$.

Hinweis: In Teil (b) müssen Sie eine geeignete Menge vom Maß 0 weglassen, bevor Sie die Transformationsformel anwenden können!

Lösung: (a) Die Abbildung

$$P :]0, 1[\times]0, \pi[\rightarrow B, \quad P(r, \phi) := (r \cos \phi, r \sin \phi)$$

ist stetig differenzierbar und bijektiv. Da $\det P'(r, \phi) = r \neq 0$ für alle (r, ϕ) , folgt mit dem Satz über die Umkehrabbildung, dass P ein Diffeomorphismus ist. Mit der Transformationsformel und dem Satz von Fubini erhalten wir also

$$\begin{aligned} \int_B f \, d\lambda_2 &= \int_{]0,1[\times]0,\pi[} f(P(r, \phi)) |\det P'(r, \phi)| \, d\lambda_2(r, \phi) \\ &= \int_{]0,1[\times]0,\pi[} \frac{2r^2 \cos(\phi) \sin(\phi)}{r^2} r \, d\lambda_2(r, \phi) \\ &= \int_{]0,1[} \left(\int_{]0,\pi[} r \sin(2\phi) \, d\lambda_1(\phi) \right) d\lambda_1(r) \\ &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,\pi]} r \sin(2\phi) \, d\lambda_1(\phi) \right) d\lambda_1(r) \\ &= \int_{[0,1]} r \left[-\frac{1}{2} \cos(2\phi) \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\lambda_1(r) = 0. \end{aligned}$$

(b) Setzen wir $A :=]0, 2\pi[\times]1, 2[$, so definiert

$$P(r, \phi) := (r \cos \phi, r \sin \phi)$$

einen Diffeomorphismus $P: A \rightarrow P(A)$, denn P ist auf A injektiv und $\det P'(r, \phi) = r \neq 0$ (so dass der Satz über die Umkehrabbildung anwendbar ist).

Nun ist $B \setminus P(A) = S \cup 2S \cup ([1, 2] \times \{0\})$, wobei $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ der Einheitskreis (Kreislinie) ist. Als Vereinigung der Graphen der stetigen Funktionen $x \mapsto \pm\sqrt{1-x^2}$ ist der Einheitskreis nach Satz / Folgerung 8.4 eine Borelmenge vom Maß 0 und ebenso $2S$. Analog ist die Strecke $[1, 2] \times \{0\}$ als Graph einer konstanten Funktion eine Borelmenge vom Maß 0. Somit ist $B \setminus P(A)$ eine Borelmenge vom Maß $\lambda_2(B \setminus P(A)) = 0$ und kann daher beim Integrieren weggelassen werden. Mit der Transformationsformel und dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_B f \, d\lambda_2 &= \int_{P(A)} f \, d\lambda_2 = \int_A f(P(r, \phi)) |\det P'(r, \phi)| \, d\lambda_2(r, \phi) \\ &= \int_A (\sin r^2) r \, d\lambda_2(r, \phi) \\ &= \int_{[0, 2\pi] \times [1, 2]} (\sin r^2) r \, d\lambda_2(r, \phi) \\ &= \int_{[0, 2\pi]} \int_{[1, 2]} (\sin r^2) r \, d\lambda_1(r) \, d\lambda_1(\phi) \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \cos r^2 \right]_{r=1}^{r=2} d\phi \\ &= \pi (\cos 1 - \cos 4), \end{aligned}$$

wobei das vierte Gleichheitszeichen darauf beruht, dass auch $([0, 2\pi] \times [1, 2]) \setminus A$ als endliche Vereinigung von Strecken eine Borelmenge vom Maß 0 ist.

Aufgabe H29 (Satz von Fubini)

Berechnen Sie das Integral $\int_A (2x + y) \, d\lambda_2(x, y)$, wobei

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x, y \geq 0\}.$$

Lösung: Unter Benutzung des Satzes von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_A (2x + y) \, d\lambda_2(x, y) &= \int_{[0, 1] \times [0, 1]} \underbrace{\mathbf{1}_A^{[0, 1]^2}(x, y)}_{=\mathbf{1}_{[0, \sqrt{1-y^2}]}^{[0, 1]}(x)} (2x + y) \, d\lambda_2(x, y) \\ &= \int_{[0, 1]} \int_{[0, 1]} \mathbf{1}_{[0, \sqrt{1-y^2}]}^{[0, 1]}(x) (2x + y) \, d\lambda_1(x) \, d\lambda_1(y) \\ &= \int_{[0, 1]} \int_{[0, \sqrt{1-y^2}]} (2x + y) \, d\lambda_1(x) \, d\lambda_1(y) \\ &= \int_{[0, 1]} [x^2 + xy]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} \, d\lambda_1(y) \\ &= \int_{[0, 1]} ((1-y^2) + y\sqrt{1-y^2}) \, d\lambda_1(y) \\ &= \left[y - \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3} (1-y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= 1 - 1/3 + 1/3 = 1. \end{aligned}$$

Aufgabe H30 (Volumenberechnung mit Kugelkoordinaten)

Skizzieren Sie grob die Menge B und berechnen Sie ihr Volumen:

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \geq x^2 + y^2 \text{ und } 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}.$$

Lösung: Die Menge B ist eine abgeschlossene “Eistüte,” die aus der abgeschlossenen Einheitskugel herausgeschnitten wurde. Zur Berechnung des Volumens von B benutzen wir Kugelkoordinaten,

$$K : [0, \infty] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad K(r, \theta, \phi) := (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

(siehe Kapitel 8 im Skript). Die Menge $Q := [0, 1] \times [0, \pi/4] \times [0, 2\pi]$ wird von K auf B abgebildet. Da Q nicht offen in $\mathbb{R}^3$ ist und $K|_Q$ nicht injektiv, können wir die Transformationsformel nicht direkt anwenden. Jedoch ist $U :=]0, 1[\times]0, \pi/4[\times]0, 2\pi[$ eine offene Menge derart, dass $K|_U$ injektiv ist. Offensichtlich ist $K|_U$ stetig differenzierbar, und wegen $\det K'(r, \theta, \phi) = r^2 \sin \theta > 0$ für $(r, \theta, \phi) \in U$ (siehe Skript!) ist nach dem Satz über die Umkehrfunktion $V := K(U)$ offen und $K|_U : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Hierbei ist

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 > x^2 + y^2 \text{ und } 0 < z < \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}.$$

Mit den Hilfsmitteln aus Kapitel 8 des Skripts sehen wir wieder, dass $\lambda_3(Q \setminus U) = \lambda_3(B \setminus V) = 0$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \lambda_3(B) &= \lambda_3(V) = \int_U |\det J_{(r, \theta, \phi)}(K)| \, d\lambda_3(r, \theta, \phi) \\ &= \int_Q r^2 \sin \theta \, d\lambda_3(r, \theta, \phi) = \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta \, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_0^{\pi/4} r^2 \sin \theta \, d\theta \, dr = 2\pi \int_0^1 r^2 \left[-\cos \theta \right]_{\theta=0}^{\pi/4} dr \\ &= 2\pi(1 - \sqrt{2}/2) \left[r^3/3 \right]_{r=0}^1 = \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \end{aligned}$$

unter Benutzung der Transformationsformel (für das zweite Gleichheitszeichen) und des Satzes von Fubini.