Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2014/15
12.01.2015

11. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Hausübungen

Aufgabe H31 (Cavalierisches Prinzip; 3 Punkte)
Es sei $M := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 1 \text{ und } (x \leq 0 \text{ oder } |y| \leq x)\big\}$.
Skizzieren Sie die Menge M und berechnen Sie ihren Flächeninhalt $\lambda_2(M)$ mit dem Prinzip von Cavalieri.

Lösung: Der Skizze sehen wir an, dass die Schnitte von M mit Parallelen zur x-Achse (und somit die Mengen M_y) etwas komplizierte Mengen sind (jedenfalls keine Intervalle). Um uns weniger Arbeit zu machen, arbeiten wir daher lieber mit den Mengen

$$_xM \;:=\; \{y \in \mathbb{R} \colon (x,y) \in M\}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Es ist

$$_xM \;=\; \begin{cases} \emptyset & \text{wenn } |x|>1; \\ [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}] & \text{wenn } x \in [-1,0] \text{ oder } x \in \big[\frac{\sqrt{2}}{2},1\big]; \\ [-x,x] & \text{wenn } x \in \;\big]0,\frac{\sqrt{2}}{2}\big[\end{cases}$$

und somit

$$\lambda_1\big({}_xM\big) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{wenn } |x|>1; \\ 2\sqrt{1-x^2} & \text{wenn } x \in [-1,0] \text{ oder } x \in \big[\frac{\sqrt{2}}{2},1\big]; \\ 2x & \text{wenn } x \in \;\big]0,\frac{\sqrt{2}}{2}\big[\,. \end{cases}$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri ist folglich

$$\begin{aligned} \lambda_2(M) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_1\big({}_xM\big)\, d\lambda_1(x) \\ &= \int_{[-1,0]} 2\sqrt{1-x^2}\, d\lambda_1(x) \;+\; \int_{]0,\frac{\sqrt{2}}{2}[} 2x\, d\lambda_1(x) \;+\; \int_{[\frac{\sqrt{2}}{2},1]} 2\sqrt{1-x^2}\, d\lambda_1(x) \\ &= \int_{-\pi/2}^{0} (1+\cos(2u))\, du \;+\; \big[x^2\big]_0^{\sqrt{2}/2} \;+\; \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1+\cos(2u))\, du \\ &= \pi/2 \;+\; 1/2 \;+\; \pi/4 \;-\; 1/2 \;=\; 3\pi/4\,. \end{aligned}$$

Aufgabe H32 (Volumenberechnung mit Zylinderkoordinaten; 3 Punkte)
Skizzieren Sie grob die Menge

$$M \ := \ \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, 0 \le z \le 2, \, 1 \le x^2+y^2 \le 4 \text{ und } 0 \le y \le x\sqrt{3} \, \right\}$$

und berechnen Sie ihr Volumen unter Benutzung von Zylinderkoordinaten.

Hinweis: Zu Zylinderkoordinaten siehe Skript, Kapitel 8!

Lösung: Die Menge M ist ein abgeschlossenes "Tortenstück" mit einem Innenwinkel von $\pi/3$, das aus einer gelochten Torte vom Innenradius 1, Außenradius 2 und der Höhe 2 herausgeschnitten wurde. Zur Berechnung des Volumens von M gehen wir hier in der Musterlösung noch einmal ganz gründlich Schritt für Schritt vor. Wenn Sie in der Praxis etwas ausrechnen wollen, können Sie das Weglassen von Nullmengen etc. natürlich im (Hinter)kopf durchführen.

Zylinderkoordinaten erlauben uns, Punkte $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ in der Form $Z(r,\phi,z)$ zu schreiben mit

$$Z\colon [0,\infty] \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 , \quad Z(r,\phi,z) := (r\cos\phi, r\sin\phi, z) \, .$$

Hierbei wird die Menge $Q := [1,2] \times [0,\pi/3] \times [0,2]$ von Z auf M abgebildet. Da Q nicht offen und Z auf Q nicht injektiv ist, können wir die Transformationsformel nicht direkt anwenden. Allerdings ist

$$U \ := \,]1,2[\, \times \,]0,\pi/3[\, \times \,]0,2[$$

offen in $\mathbb{R}^3$ und $\lambda_3(Q \setminus U) = 0$ (denn $Q \setminus U$ ist Teilmenge einer Vereinigung endlich vieler 2-dimensionaler affiner Unterräume von $\mathbb{R}^3$). Weiter ist

$$V \ := \ Z(U) \ = \ \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, 0 < z < 2, \, 1 < x^2+y^2 < 4 \text{ und } 0 < y < x\sqrt{3} \, \right\}$$

offen und $Z|_U \colon U \to V$ ein Diffeomorphismus (da dies eine stetig differenzierbare Bijektion zwischen offenen Mengen ist, deren Ableitung $Z'(r,\phi,z)$ wegen $\det Z'(r,\phi,z) = r$ (siehe Skript) für alle $(r,\phi,z) \in U$ invertierbar ist). Hier ist auch $\lambda_3(M \setminus V) = 0$, denn $M \setminus V$ ist enthalten in einer Vereinigung von zwei Hyperebenen (oberer und unterer "Deckel") sowie den Bildern von zwei stetig differenzierbaren Funktionen auf offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ (so erhält man den inneren und äußeren Zylindermantel). Somit ist

$$\begin{aligned}
\lambda_3(M) \ &= \ \lambda_3(V) \ = \ \int_U |\det J_{(r,\phi,z)}(Z)| \, d\lambda_3(r,\phi,z) \\
&= \ \int_U r \, d\lambda_3(r,\phi,z) \ = \ \int_Q r \, d\lambda_3(r,\phi,z) \\
&= \ \int_{[1,2]} \int_{[0,\pi/3]} \int_{[0,2]} r \, d\lambda_1(z) \, d\lambda_1(\phi) \, d\lambda_1(r) \\
&= \ \int_1^2 \int_0^{\pi/3} \int_0^2 r \, dz \, d\phi \, dr \ = \ \int_1^2 \frac{2\pi}{3} \, r \, dr \ = \ \pi
\end{aligned}$$

unter Benutzung der Transformationsformel (für das zweite Gleichheitszeichen) und des Satzes von Fubini.

Aufgabe H33 (Durchdringungskörper zweier Zylinder; 3 Punkte)
Wir betrachten die Zylinder

$$Z_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 \le 1\} \quad \text{und}$$

$$Z_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+z^2 \le 1\}$$

sowie ihre Schnittmenge $M := Z_1 \cap Z_2$.

(a) Versuchen Sie eine grobe Skizze von M.

(b) Bestimmen Sie für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Menge

$$_{(x,y)}M \;:=\; \{z \in \mathbb{R} \colon (x,y,z) \in M\}\,.$$

(c) Berechnen Sie das Volumen $\lambda_3(M)$ von M.

Lösung: (a) Die in der x-y-Ebene liegende Kreisscheibe $\{(x,y,0) : x^2+y^2 \le 1\}$ ist offensichtlich in M enthalten. Wenn wir uns von $(x,y,0)$ mit $x^2+y^2 \le 1$ ausgehend in z-Richtung bewegen, geraten wir für $z = \pm\sqrt{1-x^2}$ an den Rand des Zylinders Z_2 und für größeren Betrag von z aus Z_2 hinaus. Diese Ideen genügen, um eine vernünftige Skizze anzufertigen.

(b) Es seien $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $z \in \mathbb{R}$. Dann

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in M \quad &\Leftrightarrow \quad (x,y,z) \in Z_1 \text{ und } (x,y,z) \in Z_2\\ &\Leftrightarrow \quad x^2+y^2 \le 1 \text{ und } x^2+z^2 \le 1.\end{aligned}$$

Somit

$$_{(x,y)}M \;=\; \begin{cases} \left[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\,\right] & \text{wenn } x^2+y^2 \le 1\\ \emptyset & \text{sonst.}\end{cases}$$

Also ist $\lambda_1({}_{(x,y)}M) = 2\sqrt{1-x^2}$ wenn $x^2+y^2 \le 1$, andernfalls $\lambda_1({}_{(x,y)}M) = 0$.

(c) Es sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Anwendung des Cavalierischen Prinzips und anschließend des Satzes von Fubini liefert

$$\begin{aligned}\lambda_3(M) \;&=\; \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_1\big({}_{(x,y)}M\big)\,d\lambda_2(x,y) = \int_D \lambda_1({}_{(x,y)}M)\,d\lambda_2(x,y)\\ &=\; \int_{[-1,1]^2} \mathbf{1}_D(x,y)2\sqrt{1-x^2}\,d\lambda_2(x,y) = \int_{-1}^1\int_{-1}^1 \mathbf{1}_D(x,y)2\sqrt{1-x^2}\,dy\,dx\\ &=\; \int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2}\,dy\,dx = \int_{-1}^1 4(1-x^2)\,dx = \left[4x-\frac{4}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \frac{16}{3}\,.\end{aligned}$$