Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2014/15

19.01.2015

12. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Hausübungen

Aufgabe H34 (Eingeschlossene Fläche; 3 Punkte)

Gegeben seien $f_1 \colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f_1(x) := \sqrt{x}$ und $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) := \frac{1}{4}x$.

(a) Bestimmen Sie die beiden Schnittpunkte der Funktionen.

(b) Berechnen Sie die Fläche, die die Funktionen einschließen, mit Hilfe eines Doppelintegrals.

Lösung: (a) Wir müssen also $\frac{1}{4}x = \sqrt{x}$ lösen. Ein Schnittpunkt liegt offensichtlich bei 0. Für den anderen Schnittpunkt stellen wir die Gleichung um zu $x^2 = 16x$ und sehen, dass der ander Schnittpunkt bei 16 liegt.

(b) Da $\frac{1}{4}x \leq \sqrt{x}$ für $0 \leq x \leq 16$ gilt, ist die eingeschlossene Fläche durch den Normalbereich $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \quad 0 \leq x \leq 16, \frac{1}{4}x \leq y \leq \sqrt{x}\}$ gegeben. Wir berechnen den Flächeninhalt also mit

$$\int_0^{16} \int_{\frac{1}{4}x}^{\sqrt{x}} 1 \, dydx = \int_0^{16} \sqrt{x} - \frac{1}{4}x \, dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^2\right)\Big|_0^{16} = \frac{128}{3} - 32 = \frac{32}{3}.$$

Aufgabe H35 (Volumen eines Rotationskörpers; 3 Punkte)

Es sei $r \colon \mathbb{R} \to [0,\infty[$ eine messbare Funktion. Uns interessiert das Volumen des Rotationskörpers

$$M \;:=\; \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2} \leq r(z)\right\} \;=\; h^{-1}([0,\infty[)$$

mit $h \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(x,y,z) := r(z) - \sqrt{x^2+y^2}$.

(a) Zeigen Sie, dass $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\lambda_3(M) = \pi \int_{\mathbb{R}} r(z)^2 \, d\lambda_1(z)$.

(c) Berechnen Sie für $\alpha > 0$ das Volumen der Menge

$$M \;:=\; \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \geq 1 \text{ und } \sqrt{x^2+y^2} \leq z^{-\alpha}\right\}.$$

Lösung: (a) Die Funktion h ist aus messbaren Funktionen aufgebaut und somit messbar. Da $[0,\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, folgt $M = h^{-1}([0,\infty[) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$.

(b) Für $z \in \mathbb{R}$ ist $M_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in M\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq$

$r(z)\} = K_{r(z)}(0)$ die abgeschlossene Kreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt 0 und Radius $r(z)$. Das Prinzip von Cavalieri liefert

$$\lambda_3(M) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(M_z)\, d\lambda_1(z) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(K_{r(z)}(0))\, d\lambda_1(z) = \int_{\mathbb{R}} \pi r(z)^2\, d\lambda_1(z)\,.$$

Hierbei wurde die (aus der Schule bekannte) Formel $\lambda_2(K_R(0)) = \pi R^2$ für die Kreisfläche benutzt, die wir gerade in Aufgabe G32 (c) (bzw. als Spezialfall dieser Aufgabe) noch einmal verifiziert haben.

(c) Analog zu Teil (b) erhalten wir

$$\lambda_3(M) = \pi \int_{[1,\infty[} z^{-2\alpha}\, d\lambda_1(z) = \pi \int_1^\infty z^{-2\alpha}\, dz\,.$$

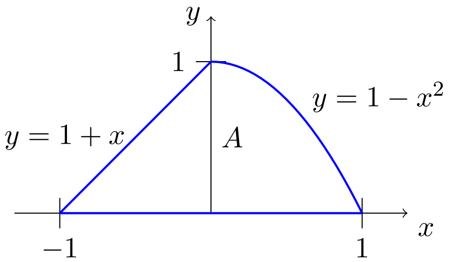
Für $\alpha \neq \frac{1}{2}$ ist also

$$\begin{aligned} \lambda_3(M) &= \lim_{n\to\infty} \pi \int_1^n z^{-2\alpha}\, dz \\ &= \lim_{n\to\infty} \pi \left[\frac{z^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\right]_1^n = \lim_{n\to\infty} \pi\, \frac{n^{1-2\alpha}-1}{1-2\alpha} \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2\alpha-1} & \text{falls } \alpha > \frac{1}{2}; \\ \infty & \text{falls } \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Für $\alpha = \frac{1}{2}$ schließlich ist $\lambda_3(M) = \pi \int_1^\infty \frac{1}{z}\, dz = \infty$.

Aufgabe H36 (Flächeninhalt; 3 Punkte)

Gegeben Sei das folgende blau umschlossene Gebiet A:



Stellen Sie ein Doppelintegral auf, das den Flächeninhalt angibt und berechnen Sie das Integral. Bestimmen Sie anschließen den geometrischen Schwerpunkt von A.
Hinweis: Der geometrische Schwerpunkt (x_S, y_S) ist durch $x_S = \frac{1}{I}\int_A x\, d(x,y)$ und $y_S = \frac{1}{I}\int_A y\, d(x,y)$ gegeben, wobei I der Flächeninhalt von A ist.
Lösung: Die Grenzen für y sind offensichtlich mit $0 \leq y \leq 1$ gegeben. Anschließend stellen wir die gegebenen Gleichungen nach x um und erhalten $y - 1 \leq x \leq \sqrt{1-y}$. Der Flächeninhalt ergibt sich also mit

$$\int_0^1 \int_{y-1}^{\sqrt{1-y}} 1\, dxdy = \int_0^1 \sqrt{1-y} - y + 1 = \left(y - \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}(1-y)^{\frac{2}{3}}\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{6}.$$

Nun Berechnen wir x_S durch

$$x_S = \frac{6}{7}\int_0^1 \int_{y-1}^{\sqrt{1-y}} x\,dxdy = \frac{6}{14}\int_0^1 1 - y - (y-1)^2\,dy = \frac{6}{14}\int_0^1 y - y^2\,dy$$
$$= \frac{6}{14}\Big(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big)\Big|_0^1 = \frac{1}{14}.$$

Bei der Berechnung von y_S nutzen wir das Integral, das wir beim Flächeninhalt berechnet haben und partielle Integration:

$$y_S = \frac{6}{7}\int_0^1 \int_{y-1}^{\sqrt{1-y}} y\,dxdy = \frac{6}{7}\int_0^1 y(\sqrt{1-y} - y + 1)\,dy$$
$$= \frac{6}{7}\bigg(y\Big(y - \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}(1-y)^{\frac{2}{3}}\Big)\bigg)\bigg|_0^1 - \frac{6}{7}\int_0^1 y - \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}(1-y)^{\frac{2}{3}}\,dy$$
$$= \frac{6}{7}\bigg(\frac{1}{2} - \Big(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} - \frac{4}{15}(1-y)^{\frac{5}{2}}\Big)\Big|_0^1\bigg) = \frac{13}{35}.$$