Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2014/15
26.01.2015

13. Übungsblatt zur „Reelle Analysis"

Hausübungen

Aufgabe H37 (Untermannigfaltigkeiten; 3 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Das einschalige Hyperboloid $H := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 - z^2 = 1\big\}$ ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

(b) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ wie in Aufgabe G37. Ist $N := M \setminus \{(0,0)\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$?

(c) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $S_{n-1} := \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

Lösung: (a) Es ist $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon f(x,y,z) = 0\}$ die Nullstellenmenge der stetig differenzierbaren Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) := x^2 + y^2 - z^2 - 1,$$

wobei $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, -2z) \neq (0,0,0)$ für alle $(x,y,z) \in H$ (da $(x,y,z) \neq (0,0,0)$). Also ist H eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

(b) N ist die Nullstellenmenge der stetig differenzierbaren Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \quad f(x,y) := x^2(1-x^2) - y^2,$$

wobei $\nabla f(x,y) = \big(2x(1-2x^2), -2y\big) \neq (0,0)$ für alle $(x,y) \in N$ (dies ist klar, wenn $y \neq 0$. Ist $y = 0$, so ist $x \in \{1,-1\}$ und somit die erste Komponente des Gradienten von Null verschieden).

(c) Die Sphäre S_{n-1} ist die Nullstellenmenge der stetig differenzierbaren Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,\ldots,x_n) := x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1.$$

Diese erfüllt $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 2x_j$, und somit ist $\nabla f(x) = (2x_1,\ldots,2x_n) \neq (0,\ldots,0)$ für alle $x = (x_1,\ldots,x_n) \in S_{n-1}$. Also ist S_{n-1} eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe H38 (Eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$; 3 Punkte)

(a) Es sei S der Kreis (Kreislinie) in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(5,0)$ und Radius 1. Finden Sie eine stetig differenzierbare Funktion $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derart, dass $S = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \colon h(y,z) = 0\}$. Zeigen Sie, dass S eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Skizzieren Sie grob die Menge

$$M \;:=\; \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon h(\sqrt{x^2+y^2},\, z)=0\big\}\,.$$

Wie sieht die Menge aus? (Beschreiben Sie sie in Worten!) Zeigen Sie unter Benutzung der Definition von Untermannigfaltigkeiten, dass M eine 2–dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

(c) Aus der Vorlesung wissen wir, dass Mannigfaltigkeiten lokal wie Graphen aussehen. Stellen Sie die Punkte (x,y,z) von M nahe $p:=(5,0,1)\in M$ explizit in der Form $(x,y,\, f(x,y))$ dar mit einer stetig differenzierbaren Funktion f.

[Hinweis: Lösen Sie $h(\sqrt{x^2+y^2},\, z)=0$ nach z auf.].

Lösung: (a) Die Funktion $h\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $h(y,z):=(y-5)^2+z^2-1$ ist stetig differenzierbar und hat wie gewünscht die Nullstellenmenge S. Es ist

$$\nabla h(y,z) \;=\; \big(2(y-5),\, 2z\big) \;\neq\; (0,0)$$

für alle $(y,z)\in S$ (falls $z=0$, ist nämlich $y\in\{4,6\}$). Also ist S eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

(b) Die Menge M entsteht durch Rotation der Menge $\{0\}\times S$ (also der Menge S, die wir uns nun in der yz-Ebene im $\mathbb{R}^3$ gelegen vorstellen) um die z-Achse. Sie ist ein sogenannter Torus, sieht also aus wie die Oberfläche eines Rings (oder eines Doughnuts).

Da $(0,0,0)\notin M$, ist M die Nullstellenmenge der stetig differenzierbaren Funktion

$$g\colon\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}\to\mathbb{R}\,,\quad g(x,y,z) \;:=\; h\big(\sqrt{x^2+y^2},\, z\big) \;=\; \big(\sqrt{x^2+y^2}\;-5\big)^2+z^2-1\,.$$

Diese erfüllt

$$\nabla g(x,y,z) \;=\; \Big(2x\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}\;-5}{\sqrt{x^2+y^2}},\; 2y\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}\;-5}{\sqrt{x^2+y^2}},\; 2z\Big) \;\neq\; (0,0,0)$$

für alle $(x,y,z)\in M$. Dies ist klar für $z\neq 0$ (man betrachte die letzte Komponente!) Andernfalls muss $\sqrt{x^2+y^2}\in\{4,6\}$ sein sowie $x\neq 0$ oder $y\neq 0$, und somit ist die erste (bzw. zweite) Komponente des Gradienten von Null verschieden. Also ist M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

(c) Lösen wir die Gleichung $g(x,y,z)=0$ nach z auf, so erhalten wir

$$z \;=\; \pm\sqrt{1-\big(\sqrt{x^2+y^2}\;-5\big)^2}\,.$$

Da die z-Koordinate von p positiv ist, gilt dies auch für Punkte nahe p. Diese Punkte sind nach voriger Formel also von der Form

$$\Big(x,\; y,\; \sqrt{1-\big(\sqrt{x^2+y^2}\;-5\big)^2}\Big)\,.$$

Nähere Betrachtung zeigt, dass $M \cap \left(\mathbb{R}^2 \times]0,\infty[\right) = \left\{\left(x,y,f(x,y)\right) : (x,y) \in U\right\}$ der Graph der stetig differenzierbaren Funktion

$$f\colon U \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) := \sqrt{1 - \left(\sqrt{x^2+y^2} - 5\right)^2}$$

ist mit $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 4 < \sqrt{x^2+y^2} < 6\}$.

Aufgabe H39 ($\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ als Mannigfaltigkeit; 3 Punkte)

Es sei $M := \{x \in \mathbb{R}^4 \colon x_1x_4 - x_2x_3 = 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass M eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$ ist.

[Interpretation: Nach dem Vorigen ist die sogenannte "spezielle lineare Gruppe"

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) := \left\{A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \colon \det(A) = x_1x_4 - x_2x_3 = 1\right\}$$

der reellen (2×2)-Matrizen mit Determinante 1 eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit des 4-dimensionalen Vektorraums $M_2(\mathbb{R})$ der 2×2-Matrizen].

(b) Lösen Sie die Gleichung $x_1x_4 - x_2x_3 = 1$ nahe $e := (1,0,0,1)$ (entspr. der Einheitsmatrix) explizit nach x_4 auf und stellen Sie M nahe e als Graph einer C^1-Funktion dar. Geben Sie eine Karte für M um e an.

Lösung: (a) M ist die Nullstellenmenge der stetig differenzierbaren Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x_1,x_2,x_3,x_4) := x_1x_4 - x_2x_3 - 1\,.$$

Da $\nabla f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_4,-x_3,-x_2,x_1)$ und jeder Punkt $x = (x_1,\ldots,x_4) \in M$ von 0 verschieden ist, gilt $\nabla f(x) \neq (0,0,0,0)$ für alle $x \in M$. Also ist M eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$.

Folglich ist die "spezielle lineare Gruppe" $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (siehe Übungsblatt !) eine Untermannigfaltigkeit von $M_2(\mathbb{R})$. Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, welche Untermannigfaltigkeiten von $M_n(\mathbb{R})$ sind, nennt man übrigens "lineare Liegruppen."

(b) $V := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 \neq 0\}$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^4$ und $U := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \neq 0\}$ offen in $\mathbb{R}^3$. Für $x = (x_1,x_2,x_3) \in U$ können wir die Gleichung $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0$ eindeutig nach x_4 auflösen:

$$x_1x_4 - x_2x_3 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_4 = \frac{1}{x_1}\left(x_2x_3+1\right).$$

Also ist $M \cap V = \{(x_1,x_2,x_3,h(x_1,x_2,x_3) : (x_1,x_2,x_3) \in U\}$ der Graph der stetig differenzierbaren Funktion

$$h\colon U \to \mathbb{R}\,, \qquad h(x_1,x_2,x_3) := \frac{1}{x_1}\left(x_2x_3+1\right).$$

Somit ist

$$\phi\colon U \to M\,, \qquad \phi(x_1,x_2,x_3) := \left(x_1,x_2,x_3,\, h(x_1,x_2,x_3)\right)$$

eine Karte für M um e.