Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2015/16
04.11.2015

2. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G4 (Details zur Vorlesung)

(a) Seien $p \in [1, \infty[$, $x \in \ell^p$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie

$$\lambda x \in \ell^p \text{ und } \|\lambda x\|_p = |\lambda| \cdot \|x\|_p.$$

Wie in der Vorlesung, gilt auch in den Übungen $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem normierten Raum $(E, \|\bullet\|)$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine in E beschränkte Menge ist.

(c) Sei $c \subseteq \ell^\infty$ der Unterraum der konvergenten Folgen. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$c \to \mathbb{K},\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$$

stetig linear ist.

Aufgabe G5 (Stetige bilineare Abbildungen)

Seien E_1, E_2 und F normierte Räume. Auf $E_1 \times E_2$ definieren wir die Norm $\|(v_1, v_2)\| = \max(\|v_1\|, \|v_2\|)$. Dass diese Vorschrift eine Norm auf $E_1 \times E_2$ definiert ist aus der Analysis II bekannt. Sei nun $A\colon E_1 \times E_2 \to F$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind:

(i) Die Abbildung A ist stetig.

(ii) Die Abbildung A ist stetig in der 0.

(iii) Es gilt

$$\|A\|_{op} := \sup\left\{\frac{\|A(v_1, v_2)\|}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} : v_1, v_2 \neq 0\right\} < \infty.$$

Aufgabe G6 (Der Raum $L^\infty[0,1]$)

Sei $f \in \mathcal{L}^\infty([0,1])$. Wir definieren $X := [0,1]$. Zeigen Sie

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} &= \min\left\{\|f_{X\setminus A}\| : A \in \mathcal{B}(X), \lambda(A) = 0\right\}\\ &= \min\left\{r \geq 0 : \exists A \in \mathcal{B}(X) \text{ mit } \lambda(A) = 0 \text{ und } \|f_{X\setminus A}\|_\infty \leq r\right\}.\end{aligned}$$