Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2015/16
25.11.2015

5. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G13 (Der Satz vom abgeschlossenem Graphen)

Seien X und Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Ist f stetig so ist $\mathrm{Graph}(f)$ abgeschlossen in $X \times Y$.
(b) Ist Y kompakt und $\mathrm{Graph}(f)$ abgeschlossen in $X \times Y$ so ist f stetig.
(c) Vergleichen Sie diese Resultate mit dem Satz vom abgeschlossenem Graphen aus der Vorlesung.

Aufgabe G14 (Zum Offenheitssatz)

(a) Zeigen Sie $\ell^1 \subseteq \ell^2$.
(b) Zeigen Sie, dass $A\colon (\ell^1, \|\bullet\|_{\ell^1}) \to (\ell^1, \|\bullet\|_{\ell^2})$, $x \mapsto x$ eine stetig lineare Bijektion ist.
(c) Zeigen Sie, dass A nicht offen sein kann. Warum ist dies kein Widerspruch zum Offenheitssatz?

Aufgabe G15 (Komplementierte Unterräume von normierten Räumen)

Seien E ein normierter Raum und $F \subseteq E$ ein abgeschlossener Untervektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass $\pi\colon E \to E/F$, $x \mapsto x + F$ offen ist. Zeigen Sie auch, dass E/F vollständig ist, sofern E vollständig ist.
(b) Sei F nun ein komplementierter Unterraum im Sinne von normierten Räumen, d.h. es gibt einen Unterrraum $H \subseteq E$, sodass $F \times H \to E$, $(x, y) \mapsto x + y$ ein Isomorphismus von normierten Räumen ist. Zeigen Sie $E \cong F \times E/F$.