Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2015/16
02.12.2015

6. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G16 (Satz von Hahn-Banach)

Sei E ein normierter Raum, $F \subseteq E$ ein abgeschlossener Unterraum und $v \in E$ mit $v \notin F$. Zeigen Sie, dass es ein stetig lineares Funktional λ auf E gibt, sodass $\lambda|_F = 0$ und $\lambda(v) \neq 0$.

Aufgabe G17 (Lineare Gleichungen)

Ist E ein normierter Raum und $V \subseteq E'$ eine Teilmenge, so definieren wir den Annullator von V in E als

$$V_\perp := \{x \in E : (\forall \lambda \in V)\ \lambda(x) = 0\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $V_\perp$ ein abgeschlossener Untervektorraum von E ist.
(b) Sei nun F ein weiterer normierter Raum und $A\colon E \to F$ eine stetig lineare Abbildung. Zeigen Sie

$$\overline{\operatorname{im}(A)} = (\ker(A'))_\perp.$$

(c) Sei $A\colon E \to F$ eine stetig lineare Abbildung mit abgeschlossenem Bild. Machen Sie sich nun klar, dass die Gleichung $Ax = y$ genau dann eine Lösung hat, wenn

$$A'\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(y) = 0$$

für alle $\lambda \in F'$ gilt.

Aufgabe G18 (Fortsetzung um eine Dimension)

Wir statten $\mathbb{R}^3$ mit der 1-Norm $\|\bullet\|_1$ aus und definieren den Unterraum

$$F := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\}$$

sowie das stetig lineare Funktional $\lambda\colon F \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto 2x$.

(a) Zeigen Sie, $\|\lambda\|_{op} = 1$.
(b) Es gilt $\mathbb{R}^3 = F \oplus \mathbb{R}e_3$. Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\Omega_a\colon F \oplus \mathbb{R}^3 e_3 \to \mathbb{R},\ u + re_3 \mapsto \lambda(u) + r \cdot a.$$

Machen Sie sich klar, dass Ω_a eine stetig lineare Fortsetzung von λ auf $\mathbb{R}^3$ ist. Nutzen Sie nun Lemma 11.12 (Fortsetzung um eine Dimension) um ein $a \in \mathbb{R}$ zu finden, sodass $\|\Omega_a\|_{op} = 1$.