Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2015/16
13.01.2016

10. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G28 (Metrische Räume sind normal)

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass jeder metrische Raum (X, d) ein normaler topologischer Raum ist.

(a) Für eine abgeschlossene Teilmenge A in X definieren wir die Funktion

$$d_A \colon X \to [0, \infty[, \ d_A(x) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

Zeige d_A ist Lipschitzstetig mit Konstante 1 und somit stetig.

(b) Zeigen Sie $d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$.

(c) Seine nun $A, B \subseteq X$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen. Wir definieren $h \colon X \to \mathbb{R}$, $h(x) := d_A(x) - d_B(x)$. Zeigen Sie, dass $h^{-1}(]-\infty, 0[)$ und $h^{-1}(]0, \infty[)$ disjunkte offene Umgebungen von A und B sind.

Aufgabe G29 (Lokal kompakte Räume)

Es sei X ein lokal kompakter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass jede offene Menge $U \subseteq X$ und jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ lokal kompakt ist.

Aufgabe G30 (Oszillation)

Sei X ein topologischer Raum und $f \colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $x \in X$ definieren wir

$$\operatorname{osc}_x(f) := \inf_{V \in \mathcal{V}} \sup_{y \in V} |f(y) - f(x)|,$$

wobei $\mathcal{V}$ der Umgebungsfilter von x ist. Zeigen Sie, dass f genau dann an der Stelle x stetig ist, wenn $\operatorname{osc}_x(f) = 0$.