Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2015/16
27.01.2016

# 12. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

## Gruppenübungen

**Aufgabe G34** (Kompaktifizierung lokalkompakter Räume)

Zunächst führen wir eine Definition ein:

**Definition.** Für einen Hausdorfschen topologischen Raum $X$ heißt ein Paar $(Y, \iota)$ bestehend aus einem kompakten Raum $Y$ und einer stetigen Abbildung $\iota\colon X \to Y$ *Kompaktifizierung* von $X$, wenn $\iota(X)$ dicht in $Y$ liegt.

Nun kommen wir zur Aufgabe:

(a) Sei $X$ ein Hausdorfscher topologischer Raum mit der Topologie $\mathcal{O}$. Des weiteren sei $\omega \notin X$ ein beliebiges Element und $X^\star := X \cup \{\omega\}$. Wir definieren

$$\mathcal{O}^\star := \mathcal{O} \cup \{X^\star \setminus A : A \subseteq X \text{ kompakt}\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $(X^\star, \mathcal{O}^\star)$ einen quasikompakten topologischen Raum bildet und die Inklusion $\iota\colon X \to X^\star$ eine topologische Einbettung mit offenem Bild ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\iota$ genau dann dichtes Bild hat, wenn $X$ nicht kompakt ist.

(c) Zeigen Sie, dass $X^\star$ genau dann ein Hausdorfraum ist, wenn $X$ lokalkompakt ist. Also ist $(X^\star, \iota)$ genau dann eine Kompaktifizierung von $X$, wenn $X$ ein nicht kompakter lokalkompakter Raum ist. In diesem Fall nennt man $(X^\star, \iota)$ die *Einpunktkompaktifizierung* bzw. *Alexandroff-Kompaktifizierung* von $X$.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^\star$ homöomorph zu $\mathbb{S}^1$ ist.

**Aufgabe G35** (Der Raum der Folgen ist nicht normierbar)

Zeigen Sie, dass es keine Norm auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gibt die die gegebene Produkttopologie beschreibt.

**Aufgabe G36** (Quotientenabbildungen)

Seien $X$ und $Y$ topologische Räume und $q\colon X \to Y$ eine Quotientenabbildung. Zudem sei $Z \subseteq Y$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass $q|_{q^{-1}(Z)}^{Z}\colon q^{-1}(Z) \to Z$ eine Quotientenabbildung ist, wenn

(i) $q$ eine abgeschlossene Abbildung ist.

(ii) $Z$ offen oder abgeschlossen ist.