Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2015/16
10.02.2016

14. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G40 (Der Satz von Montel)

Wir definieren $\mathbb{D}_r := B_r^{\mathbb{C}}(0)$. Seien $1 > r > s > 0$ und $\Gamma \subseteq \mathrm{Hol}(\mathbb{D}_1)$, sodass

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} \|f|_{\mathbb{D}_r}\|_\infty < \infty.$$

Zeigen Sie, dass $\Gamma|_{\overline{\mathbb{D}}_s} := \left\{ f|_{\overline{\mathbb{D}}_s} : f \in \Gamma \right\}$ relativ kompakt in $C(\overline{\mathbb{D}}_s)$ ist.

Aufgabe G41 (Existenzsatz von Peano)

Seien $y_0 \in \mathbb{R}$, $T, R \in]0,\infty[$ und $f\colon [0,T] \times [y_0 - R, y_0 + R] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $M := \|f\|_\infty < \infty$. Wir wählen $\varepsilon \in]0,T]$ so klein, dass $\varepsilon \cdot M \leq R$ und definieren

$$\mathcal{L} := \{\varphi\colon [0,\varepsilon] \to \mathbb{R} : \varphi \text{ ist Lipschitz-stetig mit } \mathrm{Lip}(\varphi) \leq M \text{ und } \varphi(0) = y_0\}.$$

Zeigen Sie, dass

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ eine relativ kompakte Teilmenge von $(C([0,\varepsilon],\mathbb{R}), \|\bullet\|_\infty)$ ist.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren $u_{n,0} := y_0$. Zeigen Sie, dass die Definition $u_{n,k+1} := u_{n,k} + \frac{\varepsilon}{n} f(\frac{k}{n}\varepsilon, u_{n,k})$ für $k \in \{1,\dots,n\}$ sinnvoll ist.

(c) Man kann den Polygonzug, der sukzessive die Punkte $(0, u_{n,0}), \dots, (\varepsilon, u_{n,n})$ miteinander verbindet als Graph einer Funktion $\varphi_n\colon [0,\varepsilon] \to \mathbb{R}$ auffassen. Geben Sie eine Funktionsvorschrift für φ_n an.

(d) Zeigen Sie, dass es eine Teilfolge $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen eine stetige Funktion $\varphi\colon [0,\varepsilon] \to \mathbb{R}$ konvergiert.

(e) Zeigen Sie, dass φ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

löst.