Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2015/16

28.10.2015

1. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Der Raum der beschränkten (stetigen) Funktionen)

(a) Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass der Raum

$$B(X) := \{f : X \to \mathbb{K} : \|f\|_\infty < \infty\},$$

der beschränkten Abbildungen auf X, ein Banachraum ist.

(b) Sei nun X ein Topologischer Raum. Ist auch der Raum

$$BC(X) := \{f \in C(X, \mathbb{K}) : \|f\|_\infty < \infty\},$$

der beschränkten stetigen Abbildungen auf X, ein Banachraum?

Lösung:

(a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in $\mathcal{B}(X)$. Für $x \in X$ ist dann $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in $\mathbb{K}$. Somit macht die Abbildung $f : X \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ Sinn. Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_n - f_m\| \le \varepsilon \quad (\forall n, m \ge N).$$

Seinen nun $m \ge N$ und $x \in X$, dann gilt

$$\|f(x) - f_m(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f_m(x)\| \le \varepsilon.$$

Folglich gilt $\|f - f_m\|_\infty \le \varepsilon$ für alle $m \ge N$. Offensichtlich ist f damit auch eine beschränkte Abbildung.

(b) Aus der Analysis I wissen wir, dass gleichmäßige Grenzwerte von stetigen Funktionen stetig sind. Daher ist $BC(X)$ ein abgeschlossener Unterraum von $B(X)$ und somit vollständig.

Aufgabe G2 (Ein nicht vollständiger normierter Raum)

Zeigen Sie, dass der Vektorraum $C([-1, 1])$ mit

$$\|\bullet\| : C([-1, 1]) \to [0, \infty[, \|f\| := \int_{-1}^{1} |f| dx$$

einen normierten Raum, aber keinen Banachraum bildet.

Lösung: Vorüberlegung: Ist $I \subseteq [-1,1]$ ein Intervall und $f \in C(I)$ mit $\int_I |f| = 0$ so folgt auf Grund der Stetigkeit von f, dass $f = 0$.

Aus der Vorüberlegung und der Tatsache, dass das Integrieren eine lineare Operation ist, folgt direkt, dass $\|\bullet\|$ eine Norm auf $C[-1,1]$ definiert. Nun definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$f_n \colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & : x \in [\frac{1}{n}, 1] \\ nx & : x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ -1 & : x \in [-1, -\frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Zudem definieren wir die Abbildung

$$g \colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & : x \in [0,1] \\ -1 & : x \in [-1,0[. \end{cases}$$

Einfaches Integrieren zeigt

$$\int_{-1}^{1} |f_n - g| dx = \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun zeigen wir, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy Folge ist:

$$\int_{-1}^{1} |f_n - f_m| dx \leq \int_{-1}^{1} |f_n - g| dx + \int_{-1}^{1} |f_m - g| dx = \frac{1}{n} + \frac{m}{.}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent ist. Angenommen es gäbe $f \in C[-1,1]$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-1}^{1} |f - g| dx \leq \int_{-1}^{1} |f - f_n| dx + \int_{-1}^{1} |g - f_n| dx \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Daher gilt $\int_{-1}^{1} |f - g| dx = 0$ und somit $\int_{[0,1]} |f|_{[0,1]} - g_{[0,1]}| dx = 0$. Da $g|_{[0,1]}$ stetig ist folgt aus der Vorüberlegung $f|_{[0,1]} = g|_{[0,1]}$. Analog sieht man $f|_{[-1,0[} = g|_{[-1,0[}$. Also $f = g$. Dies ist ein widerspruch, da g unstetig ist.