Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2015/16
04.11.2015

2. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G4 (Details zur Vorlesung)

(a) Seien $p \in [1, \infty[$, $x \in \ell^p$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie

$$\lambda x \in \ell^p \text{ und } \|\lambda x\|_p = |\lambda| \cdot \|x\|_p.$$

Wie in der Vorlesung, gilt auch in den Übungen $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem normierten Raum $(E, \|\bullet\|)$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine in E beschränkte Menge ist.

(c) Sei $c \subseteq \ell^\infty$ der Unterraum der konvergenten Folgen. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$c \to \mathbb{K},\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$$

stetig linear ist.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda x_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^p |x_i|^p = |\lambda|^p \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty.$$

Es folgt direkt $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \cdot \|x\|_p$.

(b) Wir finden ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x_m\| < 1$ für alle $n, m \geq N$. Ist $n \geq N$, so gilt

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x_N\| + \|x_N\| \leq 1 + \|x_N\|.$$

Ist $n \leq N$ so gilt

$$\|x_n\| \leq \max\{\|x_k\| : k = 1, \ldots, N\}.$$

Somit folgt direkt die Behauptung.

(c) Es gilt

$$|c(x_n)_{n\in\mathbb{N}}| = |\lim_{n\to\infty} x_n| = \lim_{n\to\infty} |x_n| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} = \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty.$$

Aufgabe G5 (Stetige bilineare Abbildungen)

Seien E_1, E_2 und F normierte Räume. Auf $E_1 \times E_2$ definieren wir die Norm $\|(v_1, v_2)\| = \max(\|v_1\|, \|v_2\|)$. Dass diese Vorschrift eine Norm auf $E_1 \times E_2$ definiert ist aus der Analysis II bekannt. Sei nun $A\colon E_1 \times E_2 \to F$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind:

(i) Die Abbildung A ist stetig.

(ii) Die Abbildung A ist stetig in der 0.

(iii) Es gilt

$$\|A\|_{op} := \sup\left\{ \frac{\|A(v_1, v_2)\|}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} : v_1, v_2 \neq 0 \right\} < \infty.$$

Lösung: (i)⇒(ii): Trivial.
(ii)⇒(iii): Sei $\delta > 0$ mit $\|A(v)\| \leq 1$ für alle $v \in \overline{B}_\delta(0)$. Nun sei $v = (v_1, v_2)$ mit $v_1, v_2 \neq 0$. Wir rechnen

$$\|Av\| = \left\| A\left(\delta \frac{v_1}{\|v_1\|}, \delta \frac{v_2}{\|v_2\|}\right) \right\| \cdot \frac{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}{\delta^2}.$$

(iii)⇒(i): Es gilt

$$\begin{aligned} &\|A(v_1, v_2) - A(w_1, w_2)\| \leq \|A(v_1, v_2) - A(v_1, w_2)\| + \|A(v_1, w_2) - A(w_1, w_2)\| \\ =&\|A(v_1, v_2 - w_2)\| + \|A(v_1 - w_1, w_2)\| \underbrace{\leq}_{(\dagger)} \|A\|_{op} \cdot \|v_1\| \cdot \|v_2 - w_2\| + \|A\|_{op}\|v_1 - w_1\| \cdot \|w_2\|. \end{aligned}$$

Die Ungleichung (†) gilt natürlich auch wenn einer der Vektoren 0 ist.

Aufgabe G6 (Der Raum $L^\infty[0,1]$)

Sei $f \in \mathcal{L}^\infty([0,1])$. Wir definieren $X := [0,1]$. Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} &= \min\left\{\|f_{X\setminus A}\| : A \in \mathcal{B}(X), \lambda(A) = 0\right\} \\ &= \min\left\{r \geq 0 : \exists A \in \mathcal{B}(X) \text{ mit } \lambda(A) = 0 \text{ und } \|f_{X\setminus A}\|_\infty \leq r\right\}. \end{aligned}$$

Lösung: Sei $M := \inf\left\{\|f|_{X\setminus A}\|_\infty : A \in \mathcal{B}(X), \lambda(A) = 0\right\}$. Wir wählen eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{B}(X)$ mit $\lambda(A_n) = 0$ und $M = \lim_{n\to\infty} \|f|_{X\setminus A_n}\|_\infty = M$. Sei $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann $A \in \mathcal{B}(X)$ und $\lambda(A) = 0$. Zudem gilt

$$\begin{aligned} &\|f|_{X\setminus A}\|_\infty \leq \|f|_{X\setminus A_n}\|_8 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ \Rightarrow &\|f|_{X\setminus A}\|_\infty \leq M. \end{aligned}$$

Wir folgern, $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \min\left\{\|f_{X\setminus A}\| : A \in \mathcal{B}(X), \lambda(A) = 0\right\}$. Zudem können wir folgern, dass $M \in \left\{r \geq 0 : \exists A \in \mathcal{B}(X) \text{ mit } \lambda(A) = 0 \text{ und } \|f_{X\setminus A}\|_\infty \leq r\right\}$. Offensichtlich ist M eine untere Schranke von $\left\{r \geq 0 : \exists A \in \mathcal{B}(X) \text{ mit } \lambda(A) = 0 \text{ und } \|f_{X\setminus A}\|_\infty \leq r\right\}$. Daher folgt auch die zweite Gleichung.