Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2015/16
11.11.2015

3. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G7 (Der Raum $L^\infty[0,1]$)

Zeigen Sie, dass der normierte Raum $(L^\infty[0,1], \|\bullet\|_{L^\infty})$ vollständing ist.

Lösung: Wir definieren $X := [0,1]$ und machen die folgende Vorüberlegung: Ist $f \in \mathcal{L}^\infty[0,1]$, $A \in \mathcal{B}(X)$ mit $\lambda(A) = 0$ und $f_{X\setminus A} < \infty$, dann können wir die Abbildung

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & : x \notin A \\ 0 & : x \in A. \end{cases}$$

definieren. Offensichtlich ist $\tilde{f}$ messbar und es gilt $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|\tilde{f}\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|\tilde{f}\|_\infty$.

Sei nun $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^\infty[0,1]$, sodass $\sum_{n=1}^\infty \|[f_n]\|_{L^\infty} < \infty$. Mit der Vorüberlegung gilt

$$\sum_{n=1}^\infty \|\tilde{f}_n\|_\infty = \sum_{n=1}^\infty \|[f_n]\|_{L^\infty} < \infty.$$

Da der Raum $B([0,1])$ vollständig ist, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \tilde{f}_n$ in $B([0,1])$. Da punktweise Grenzwerte messbarer Funktionen messbar sind, ist $\sum_{n=1}^\infty \tilde{f}_n$ messbar. Nun rechnen wir

$$\left\| \sum_{n=1}^N [f_n] - \left[\sum_{n=1}^\infty \tilde{f}_n\right] \right\|_{L^\infty} = \left\| \left[\sum_{n=1}^N \tilde{f}_n\right] - \left[\sum_{n=1}^\infty \tilde{f}_n\right] \right\|_{L^\infty} \leq \left\| \sum_{n=1}^N \tilde{f}_n - \sum_{n=1}^\infty \tilde{f}_n \right\|_\infty \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Also ist jede absolut konvergente Reihe auch konvergent. Es folgt die Aussage.

Aufgabe G8 (Banachräume die nicht separabel sind)

(a) Zeigen Sie, dass ℓ^∞ nicht separabel ist.
(b) Zeigen Sie, dass $L^\infty[0,1]$ nicht separabel ist.

Lösung:

(a)
- Der topologische Raum $\{0,1\}^\mathbb{N}$ mit der diskreten Topologie ist nicht separabel: Angenommen $M \subseteq \{0,1\}^\mathbb{N}$ ist abzählbar und dicht. Dann gilt $\{0,1\}^\mathbb{N} = \overline{M} = M$, da in der diskreten Topologie jede Menge abgeschlossen ist. Somit wäre $\{0,1\}^\mathbb{N}$ abzählbar. Dies ist ein Widerspruch.

- ℓ^∞ induziert auf $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die diskrete Metrik: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, dann

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \begin{cases} 0: & x_n = y_n \ (\forall n \in \mathbb{N}) \\ 1: & \text{sonst} \ . \end{cases}$$

- Wäre nun ℓ^∞ separabel, dann müsste auch $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit der diskreten Metrik separabel sein. Dies ist ein Widerspruch.

(b) Gegeben $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ betrachten wir die Abbildung $\varphi_\alpha \colon [0,1] \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \alpha_n$ wenn $x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Offensichtlich ist $\varphi_\alpha \in \mathcal{L}^\infty[0,1]$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\iota \colon \ell^\infty \to L^\infty[0,1], \ \alpha \mapsto [\varphi_\alpha].$$

Wir zeigen, dass $\iota \colon \ell^\infty \to \operatorname{im}(\iota)$ eine Isometrie ist: Seien $\alpha \in \ell^\infty$ und $A \in \mathcal{B}[0,1]$ mit $\lambda(A) = 0$ und $\|\varphi_\alpha\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|\varphi_\alpha|_{[0,1]\setminus A}\|_\infty$. Dann gilt

$$\|\alpha\|_\infty = \|\varphi_{\_}a\|_\infty = \|\varphi_\alpha|_{[0,1]\setminus A}\|_\infty = \|\varphi_\alpha\|_{\mathcal{L}^\infty}.$$

Hier folgt die zweite Gleichheit aus $\|\varphi_\alpha|_A\|_\infty \leq \|\varphi_\alpha|_{[0,1]\setminus A}\|_\infty$. Wäre nun $L^\infty[0,1]$ separabel, so müsste auch ℓ^∞ separabel sein. Dies ist ein Widerspruch.

Aufgabe G9 (Separabilität)

Zeigen Sie, dass ein normierter Raum E genau dann separabel ist, wenn $\partial B_1^E(0)$ separabel ist.

Lösung: $\Rightarrow$: Wenn E separabel ist, so ist auch $\partial B_1^E(0)$ separabel.
$\Leftarrow$: Sei nun $\partial B_1^E(0)$ separabel. Sei $M \subseteq \partial B_1^E(0)$ abzählbar mit $\overline{M} = \partial B_1^E(0)$. Dann ist $N := \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} qM$ abzählbar. Wir zeigen $\overline{N} = E$. Seien $v \in E$ und $U \subseteq E$ eine v-Umgebung. OBdA. seien $v \neq 0$ und $U = B_r(v)$. Wir haben $\frac{v}{\|v\|} \in \partial B_1(0)$ und finden ein $x \in M$ mit $x \in B_{\frac{r}{2\|v\|}}(\frac{v}{\|v\|})$. Sei nun $q \in \mathbb{Q}_+$ mit $q \leq \|v\|$ und $\|v\| - q < \frac{r}{2}$. Wir zeigen $qx \in U$:

$$\|\lambda x - v\| \leq \left\|\lambda x - \frac{\lambda v}{\|v\|}\right\| + \left\|\frac{\lambda v}{\|v\|} - v\right\| < \frac{\lambda r}{2\|v\|} + \left|\frac{\lambda}{\|v\|} - 1\right| \cdot \|v\| \leq r.$$