Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2015/16
18.11.2015

4. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G10 (Wiederholung aus Funktionen Theorie)

Sei $E := \{f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \text{ holomorph}\}$ der Raum der ganzen Funktionen auf $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\|\bullet\|\colon E \to [0,\infty[,\ f \mapsto \sup_{x\in\overline{B}_1^{\mathbb{C}}(0)} |f(x)|$$

eine Norm auf E definiert und dass E mit dieser Norm separabel ist.

Lösung: Positive Homogenität und Subadditivität von $\|\bullet\|$ sind klar. Die Definitheit folgt aus dem Eindeutigkeitssatz. Wir zeigen, dass die Polynome in E dicht liegen: Seien $f \in E$ und $\varepsilon > 0$. Es gilt $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(j)}}{i!}(0)x^i$ für alle $x \in \mathbb{C}$. Die Potenzreihe konvergiert gleichmäßig auf $\overline{B}_1^{\mathbb{C}}(0)$. Daher gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\left|f(x) - \sum_{i=1}^{N} \frac{f^{(j)}}{i!}(0)x^i\right| \leq \varepsilon$ für alle $x \in \overline{B}_1^{\mathbb{C}}(0)$. Somit liegen die Polynome dicht in E. Da die Polynome $x \mapsto x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ somit eine abzählbare totale Teilmenge bilden ist E separabel.

Aufgabe G11 (Gleichmäßige Stetigkeit)

Seien (X,d) ein metrischer Raum und $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $x \in K$ gibt es ein $\varepsilon_x > 0$, sodass $d(y,x) < \varepsilon_x \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $y \in X$ gilt. Da $\operatorname{supp}(f)$ kompakt ist finden wir $x_1, \ldots, x_n \in \operatorname{supp}(f)$, sodass $\operatorname{supp}(f) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$. Nun wählen wir eine Lebesguesche Zahl $\delta > 0$ für diese Überdecknung. D.h. für jedes $y \in \operatorname{supp}(f)$ gibt es ein i mit $B_\delta(y) \subseteq B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$. Seien nun $y', y \in X$ mit $d(y,y') < \delta$. Ohne Beschränkung dürfen wir $y \in \operatorname{supp}(f)$ annehmen. Es gibt nun i mit $B_\delta(y) \subseteq B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$. Nun folgt

$$\|f(y) - f(y')\| \leq \|f(y) - f(x_i)\| + \|f(x_i) - f(y')\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Aufgabe G12 (Satz von Weierstraß)

Seien $t_1 < \cdots < t_n \in [a,b]$, $f \in C[a,b]$ und $\varepsilon > 0$. Finden Sie ein Polynom p über $[a,b]$, sodass $\|f - p\| < \varepsilon$ und $f(t_i) = p(t_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Lösung: Wir definieren für $i = 1, \dots, n$ das Polynom

$$\ell_i \colon [a,b] \to \mathbb{K},\ x \mapsto \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - t_j}{t_i - t_j}$$

sowie $M := \max_i \|\ell_i\|_\infty$. Wir finden ein Polynom p_1 mit $\|f - p_1\|_\infty < \min(\frac{\varepsilon}{M \cdot 2n}, \frac{\varepsilon}{2})$. Sei nun $q(x) := \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - p_1(t_i)) \cdot \ell_i(x)$ für $x \in [a,b]$. Dann ist $p := p_1 + q$ ein Polynom mit $p(t_i) = f(t_i)$. Zudem gilt

$$|f(x) - p(x)| \leq \|f - p_1\|_\infty + |q(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - p_1(t_i) \cdot \|\ell_i\|_\infty < \varepsilon.$$