Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2015/16
25.11.2015

5. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G13 (Der Satz vom abgeschlossenem Graphen)

Seien X und Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Ist f stetig so ist $\mathrm{Graph}(f)$ abgeschlossen in $X \times Y$.
(b) Ist Y kompakt und $\mathrm{Graph}(f)$ abgeschlossen in $X \times Y$ so ist f stetig.
(c) Vergleichen Sie diese Resultate mit dem Satz vom abgeschlossenem Graphen aus der Vorlesung.

Lösung:

(a) Sei $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathrm{Graph}(f)$ und $\lim(x_n, y_n) = (x, y)$ in $X \times Y$. Nun folgt $(x, y) \in \mathrm{Graph}(f)$ mit

$$y = \lim y_n = \lim f(x_n) = f(x).$$

(b) Nun sei Y kompakt und $\mathrm{Graph}(f)$ sei abgeschlossen. Angenommen es gibt eine Folge $(x_n)_n$ in X mit $x := \lim x_n$, sodass $(f(x_n))_n$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass $f(x_n) \notin B_\varepsilon(f(x))$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir o.B.d.A. $f(x_n) \notin B_\varepsilon(f(x))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Da Y kompakt ist gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ und ein $y \in Y$, sodass $\lim_k f(x_{n_k})_k = y$. Nun gilt aber $\lim(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \in \mathrm{Graph}(f)$. Da $\mathrm{Graph}(f)$ abgeschlossen ist, folgt $(x, y) \in \mathrm{Graph}(f)$ und somit

$$f(x) = y = \lim_k f(x_{n_k}).$$

Dies ist aber ein Widerspruch.

(c) Der Satz vom abgeschlossenen Graphen aus der Vorlesung benötigt keine Kompaktheitseigenschaften, dafür müssen X und Y Banachräume sein und f eine lineare Abbildung.

Aufgabe G14 (Zum Offenheitssatz)

(a) Zeigen Sie $\ell^1 \subseteq \ell^2$.
(b) Zeigen Sie, dass $A\colon (\ell^1, \|\bullet\|_{\ell^1}) \to (\ell^1, \|\bullet\|_{\ell^2})$, $x \mapsto x$ eine stetig lineare Bijektion ist.
(c) Zeigen Sie, dass A nicht offen sein kann. Warum ist dies kein Widerspruch zum Offenheitssatz?

Lösung:

(a) Sei $x := (x_n)_n \in \ell^1$. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot |x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (|x_k| \cdot \|x\|_1) = \|x\|_1^2 < \infty. \tag{1}$$

(b) Aus (1) folgt $\|Ax\|_2^2 \leq \|x\|_1^2$ und somit $\|Ax\|_2 \leq \|x\|_1$. Offensichtlich ist A bijektiv.

(c) Wir zeigen, dass A^{-1} nicht stetig ist. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$x^n := (x_k^n)_{k \in \mathbb{N}} := \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n-\text{mal}}, 0, \ldots \right).$$

Wir folgern $\|x^n\|_1 = 1$ und $\|x^n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also gegen 0 in ℓ^2 aber $(Ax^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen 0 in ℓ^1.

(d) Es handelt sich nicht um einen Widerspruch, da $(\ell^1, \|\bullet\|_{\ell^2})$ nicht vollständig ist.

Aufgabe G15 (Komplementierte Unterräume von normierten Räumen)

Seien E ein normierter Raum und $F \subseteq E$ ein abgeschlossener Untervektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass $\pi\colon E \to E/F$, $x \mapsto x + F$ offen ist. Zeigen Sie auch, dass E/F vollständig ist, sofern E vollständig ist.

(b) Sei F nun ein komplementierter Unterraum im Sinne von normierten Räumen, d.h. es gibt einen Unterrraum $H \subseteq E$, sodass $F \times H \to E$, $(x, y) \mapsto x + y$ ein Isomorphismus von normierten Räumen ist. Zeigen Sie $E \cong F \times E/F$.

Lösung:

(a) Wurde bereits in der Vorlesung gezeigt.

(b) Es gilt $E = H \oplus F$ im Sinne von normierten Räumen. Wir nutzen die übliche Notation $x = x_H + x_F$ für die eindeutige Zerlegung eines Vektors x. Es gilt $E \cong H \times F$ als topologische Isomorphie von normierten Räumen. Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass $\pi|_H\colon H \to E/F$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Da $\varphi|_H$ stetig ist, reicht es zu zeigen, dass $\pi|_H$ auch offen ist. Sei $r > 0$. Wir zeigen, dass $\pi(B_r^H(0))$ eine 0-Umgebung ist. Die Abbildung $E \to F \times H$, $x \mapsto (x_F, x_H)$ ist stetig in 0. Wir finden also ein $\delta > 0$, sodass $\max(\|y_H\|, \|y_F\|) < r$ für alle $y \in B_\delta^E(0)$. Wir zeigen:

$$B_{\delta/2}^{E/F}(0) \subseteq \pi(B_r^H(0))$$

Sei $x + F \in B_{\delta/2}^{E/F}(0)$. Dann gibt es ein $v \in F$, sodass $\|x + v\| < \delta$. Damit gilt $\|x_H + (x_F + v)\| < \delta$ und somit $\|x_H\| < r$. Offensichtlich gilt $x + F = \pi(x_H)$.