Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2015/16
02.12.2015

6. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G16 (Satz von Hahn-Banach)

Sei E ein normierter Raum, $F \subseteq E$ ein abgeschlossener Unterraum und $v \in E$ mit $v \notin F$. Zeigen Sie, dass es ein stetig lineares Funktional λ auf E gibt, sodass $\lambda|_F = 0$ und $\lambda(v) \neq 0$.

Lösung: Nach Hahn-Banach gibt existiert $\lambda_1 \in (E/F)'$ mit $\lambda_1(v + F) \neq 0$. Nun liefert $\lambda := \lambda \circ \pi$ mit $\pi\colon E \to E/F$, $x \mapsto s + F$ das gewünschte.

Aufgabe G17 (Lineare Gleichungen)

Ist E ein normierter Raum und $V \subseteq E'$ eine Teilmenge, so definieren wir den Annullator von V in E als

$$V_\perp := \{x \in E : (\forall \lambda \in V)\ \lambda(x) = 0\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $V_\perp$ ein abgeschlossener Untervektorraum von E ist.
(b) Sei nun F ein weiterer normierter Raum und $A\colon E \to F$ eine stetig lineare Abbildung. Zeigen Sie

$$\overline{\mathrm{im}(A)} = (\ker(A'))_\perp.$$

(c) Sei $A\colon E \to F$ eine stetig lineare Abbildung mit abgeschlossenem Bild. Machen Sie sich nun klar, dass die Gleichung $Ax = y$ genau dann eine Lösung hat, wenn

$$A'\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(y) = 0$$

für alle $\lambda \in F'$ gilt.

Lösung:

(a) Dies folgt aus

$$V_\perp = \bigcap_{\lambda \in V} \ker(\lambda).$$

(b) Seien $x \in E$, $y := Ax$ und $\lambda \in \ker(A')$. Dann ist $\lambda \circ A = 0$. Also $\lambda(y) = \lambda \circ A(x) = 0$. Da $y \in \mathrm{im}(A)$ beliebig war folgt $\mathrm{im}(A) \subseteq (\ker(A'))_\perp$. Die rechte Seite ist abgeschlossen, somit folgt $\overline{\mathrm{im}(A)} \subseteq (\ker(A'))_\perp$. Sei nun $y \in F$ mit $\lambda(y) = 0$ für alle $\lambda \in \ker(A')$. Angenommen $y \notin \overline{\mathrm{im}(A)}$. Nach G16 gibt es ein $\lambda \in F'$ mit $\lambda(y) \neq 0$ und $\lambda(\overline{\mathrm{im}(A)}) = 0$. Insbesondere gilt $A'(\lambda) = 0$. Dies ist ein Widerspruch.

(c) Klar.

Aufgabe G18 (Fortsetzung um eine Dimension)
Wir statten $\mathbb{R}^3$ mit der 1-Norm $\|\bullet\|_1$ aus und definieren den Unterraum

$$F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$$

sowie das stetig lineare Funktional $\lambda\colon F \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto 2x$.

(a) Zeigen Sie, $\|\lambda\|_{op} = 1$.
(b) Es gilt $\mathbb{R}^3 = F \oplus \mathbb{R}e_3$. Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\Omega_a\colon F \oplus \mathbb{R}^3 e_3 \to \mathbb{R},\ u + re_3 \mapsto \lambda(u) + r \cdot a.$$

Machen Sie sich klar, dass Ω_a eine stetig lineare Fortsetzung von λ auf $\mathbb{R}^3$ ist. Nutzen Sie nun Lemma 11.12 (Fortsetzung um eine Dimension) um ein $a \in \mathbb{R}$ zu finden, sodass $\|\Omega_a\|_{op} = 1$.

Lösung:

(a) Sei $x+y+z=0$. Es gilt

$$|2x| = |x| + |y+z| \leq |x| + |y| + |z|. \tag{1}$$

Setzt man $(x,y,z) := (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ so gilt Gleichheit in (1).

(b) Nach Lemma 11.12 erhalten wir $\|\Omega_a\|_{op} = 1$ genau dann, wenn $a \in [\sup_{p\in F} A_p, \inf_{p \in F} B_p]$ mit $A_p = \lambda(p) - \|p - e_3\|$ und $B_p = \lambda(p) - \|p - e_3\|$. Wir setzen $a := \sup_{p \in F} A_p$.
Sei nun $p := (x,y,z) \in F$. Dann $z = -x-y$. Also

$$A_p = 2x - |x| - |y| - |x+y+1|.$$

1. Fall $x+y+1 \geq 0$: Dann

$$A_p = 2x - |x| - |y| - x - y - 1 = \underbrace{(x - |x|)}_{\leq 0} - \underbrace{(y + |y|)}_{\geq 0} - 1 \leq -1.$$

2. Fall $x+y+1 \leq 0$ und $x \geq 0$: Dann ist $y < 0$ und wir rechnen:

$$A_p = 2x - x + y + \underbrace{x+y+1}_{\leq 0} \leq x + y \leq -1.$$

3. Fall $x \leq 0$: Es gilt

$$|1+x+y| \geq 1 - |x+y| \geq 1 - (|x| + |y|) = 1 - |x| - |y|.$$

Also

$$A_p = 2x - |x| - |y| - |x+y+1| \leq 2x - |x| - |y| - 1 + |x| + |y| = 2x - 1 \leq -1.$$

Somit liefert $a = -1$ das Gewünschte.