Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2015/16
09.12.2015

7. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G19 (Adjungierte Abbildung)

Seien E und F Banachräume und $A\colon E \to F$ eine stetig linerare Abbildung. Zudem sei A' ein topologischer Isomorphismus von normierten Räumen. Zeigen Sie, dass auch A ein topologischer Isomorphismus von normierten Räumen ist.

Lösung: Da A' ein topologischer Isomorphismus ist folgt, dass A'' ein topologischer Isomorphismus ist. Aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "A"] \arrow[d, "i_E"'] & F \arrow[d, "i_F"] \\ E'' \arrow[r, "A''"] & F'' \end{tikzcd}$$

folgt die Injektivität von A. Nutzen wir die Identifikationenen $E \cong \operatorname{im}(i_E)$ bzw. $F \cong \operatorname{im}(i_F)$ so sehen wir $A''(E) = A(E) \subseteq F \subseteq F''$. Da E ein Banachraum ist, folgt, dass E abgeschlossen in E'' ist. Somit ist $A''(E) = A(E) \subseteq F$ abgeschlossen in F''. Es folgt, dass $A(E)$ abgeschlossen in F ist. Die Surjektivität von A folgt nun aus G17. Die Offenheit folgt aus dem Offenheitssatz.

Aufgabe G20 (Punktweise Grenzwerte)

Seien E ein Banachraum und F ein normierter Raum. Zudem Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\mathcal{L}(E,F)$, die gegen eine Funktion $A\colon E \to F$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen $A \in \mathcal{L}(E,F)$ folgt. Das heißt punktweise Grenzwerte von stetig **linearen** Funktionen auf **Banachräumen** sind stetig.
(b) Gilt im Allgemeinen auch $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ im Raum $(\mathcal{L}(E,F), \|\bullet\|_{op})$?
(c) Wie sieht die Situation aus wenn E und F endlich-dimensional sind?

Lösung:

(a) Offensichtlich ist $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ punktweise beschränkt. Aus dem Satz über gleichmäßige Beschränktheit folgern wir die Existenz eines $M > 0$ mit $M \geq \|A_n\|_{op}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist A linear. Sei nun $v \in E$. Es gilt

$$\|Av\| = \lim_n \|A_n v\| \leq \lim_n M\|v\| = M\|v\|.$$

Es folgt die Stetigkeit von A.

(b) Die Aussage ist falsch. Wir geben ein Gegenbeispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \colon \ell^2 \to \ell^2$ definiert durch

$$A_n(x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0 \dots).$$

Punktweise konvergiert die Folge A_n gegen die Identität. Jedoch gilt $\|A_n - \mathrm{id}\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Sind E und F endlich-dimensional so gilt $\mathcal{L}(E, F) \cong \mathbb{K}^{n \times m}$ für passende n, m. Auf $\mathbb{K}^{n \times m}$ ist die Operatornorm äquivalent zur der Maximumsnorm. D.h. $\|A - A_k\|_{op} \to 0$ genau dann wenn $\lim_k \mathrm{pr}_j(A - A_k)(e_i) = 0$ für alle $i \in \{0, \dots, m\}$ und $j \in \{0, \dots, n\}$. Aus punktweiser konvergenz einer Funktionenfolge folgt aber die gleichmäßige Konvergenz auf endlichen Teilmengen. Damit gilt $\lim_k (A - A_k)(e_i) = 0$ für alle $i \in \{0, \dots, m\}$.

Aufgabe G21 (Orthogonale Komplemente)

Sei F ein Unterrraum eines Hilbertraums H. Zeigen Sie $\overline{F} = (F^{\perp})^{\perp}$.

Lösung: Sei $x \in F$. Dann gibt es $x_{||} \in (F^{\perp})$ und $x_{\perp} \in (F^{\perp})^{\perp}$, sodass $x = x_{||} + x_{\perp}$. Wir rechnen

$$0 = \langle x, x_{||} \rangle = \langle x_{||}, x_{||} \rangle + \langle x_{\perp}, x_{||} \rangle = \|x_{||}\|^2.$$

Wir erhalten $x_{||} = 0$. Somit gilt $x = x_{\perp} \in (F^{\perp})^{\perp}$. Da $(F^{\perp})^{\perp}$ abgeschlossen ist, folgt $\overline{F} \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$. Nun verwenden wir, dass F ein Untervektorraum ist. $\overline{F}$ ist dann nämlich ein abgeschlossener Untervektorraum. Sei nun $x \in (F^{\perp})^{\perp}$. Dann gibt es $x_{||} \in \overline{F}$ und $x_{\perp} \in \overline{F}^{\perp} \subseteq F^{\perp}$, sodass $x = x_{||} + x_{\perp}$. Es gilt

$$0 = \langle x, x_{\perp} \rangle = \langle x_{||}, x_{\perp} \rangle + \langle x_{\perp}, x_{\perp} \rangle = \|x_{\perp}\|^2$$

Somit folgt $x_{\perp} = 0$. Wir folgern $x = x_{||} \in \overline{F}$.