Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2015/16
13.01.2016

10. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G28 (Metrische Räume sind normal)

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass jeder metrische Raum (X, d) ein normaler topologischer Raum ist.

(a) Für eine abgeschlossene Teilmenge A in X definieren wir die Funktion

$$d_A\colon X \to [0, \infty[,\ d_A(x) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

Zeige d_A ist Lipschitzstetig mit Konstante 1 und somit stetig.

(b) Zeigen Sie $d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$.

(c) Seine nun $A, B \subseteq X$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen. Wir definieren $h\colon X \to \mathbb{R}$, $h(x) := d_A(x) - d_B(x)$. Zeigen Sie, dass $h^{-1}(]-\infty, 0[)$ und $h^{-1}(]0, \infty[)$ disjunkte offene Umgebungen von A und B sind.

Lösung:

(a) Seien $x, y \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $a_y \in A$, sodass $d_A(y) + \varepsilon > d(a_y, y)$. Nun folgt mit der umgedrehten Dreiecksungleichung:

$$d_A(x) - d_A(y) \leq d(a_y, x) - d(a_y, y) + \varepsilon \leq d(x, y) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt $d_A(x) - d_A(y) \leq d(x, y)$. Vertauschen der Rollen von x und y liefert nun die Aussage.

(b) Eine Richtung ist trivial. Sei nun $d_A(x) = 0$, dann gibt es Folge a_n in A mit $d(a_n, x) \to 0$. Aus der Abgeschlossenheit von A folgt $x \in A$.

(c) Offensichtlich sind $h^{-1}(]-\infty, 0[)$ und $h^{-1}(]0, \infty[)$ disjunkte offene Mengen. Wir zeigen $A \subseteq h^{-1}(]-\infty, 0[)$. Sei $x \in A$, dann folgt $d_A(x) = 0$ und $d_B(x) > 0$. Somit folgt $x \in h^{-1}(]-\infty, 0[)$. Die Inklusion $B \subseteq h^{-1}(]0, \infty[)$ folgt analog.

Aufgabe G29 (Lokal kompakte Räume)

Es sei X ein lokal kompakter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass jede offene Menge $U \subseteq X$ und jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ lokal kompakt ist.

Lösung:

(a) Sei $U \subseteq X$ offen, $x \in U$ und $V \subseteq U$ eine x Umgebung in U. Dann gibt es eine kompakte Umgebung in X die in V enthalten ist. Diese ist auch eine kompakte x Umgebung in U.

(b) Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, $x \in A$, $V \subseteq A$ eine x-Umgebung in V. Dann gibt es eine x-Umgebung W in X mit $V = A \cap W$. Sei $K \subseteq W$ eine kompakte x-Umgebung in X. $K \cap A$ ist die gesuchte x-Umgebung in A.

Aufgabe G30 (Oszillation)

Sei X ein topologischer Raum und $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $x \in X$ definieren wir

$$\mathrm{osc}_x(f) := \inf_{V \in \mathcal{V}} \sup_{y \in V} |f(y) - f(x)|,$$

wobei $\mathcal{V}$ der Umgebungsfilter von x ist. Zeigen Sie, dass f genau dann an der Stelle x stetig ist, wenn $\mathrm{osc}_x(f) = 0$.

Lösung: Für $V \in \mathcal{V}$ definieren wir $c_V := \sup_{y \in V} |f(y) - f(x)|$. Sei nun f stetig in x und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es V mit $c_V < \varepsilon$. Also $\mathrm{osc}_x(f) < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\mathrm{osc}_x(f) = 0$. Sei nun $\mathrm{osc}_x(f) = 0$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es V mit $c_V < \varepsilon$. Also ist f stetig in x.