Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2015/16
20.01.2016

11. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G31 (Topologische Gruppen und Vektorräume)

(a) Zeigen Sie, dass jeder Untervektorraum eines topologischen Vektorraums mit der induzierten Topologie wieder ein topologischer Vektorraum ist.
(b) Zeigen Sie, dass Produkte von Familien von topologischen Vektorräumen, ausgestattet mit der Produkttopologie, wieder topologische Vektorräume sind.
(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, ausgestattet mit der induzierten Topologie von $\mathbb{R}^{n\times n}$, eine topologische Gruppe ist.

Lösung:

(a) Sei $F \subseteq E$ ein solcher Unterraum. Wir wissen, dass F eine topologische Gruppe ist. Sei $\lambda\colon \mathbb{R}\times E \to E$ die Skalarmultiplikation. Die Einschräkung auf $\mathbb{R}\times F$ ist stetig und nimmt ihr Bild in F an. Daher ist $\lambda\colon \mathbb{R}\times F \to F$ stetig. Wir haben implizit verwendet, dass die Produkttopologie auf $\mathbb{R}\times F$ mit der Unterraumtopologie $\mathbb{R}\times F \subseteq \mathbb{R}\times E$ übereinstimmt.
(b) Sei $(E_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Vektorräumen. Wir in (a) reicht es zu zeigen, dass die Skalarmultiplikation stetig ist. Dies folgt aus dem folgenden Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\times\prod_i E_i \arrow[r] \arrow[d] & \prod_i E_i \arrow[r] & E_{i_0} \\
\mathbb{R}\times E_{i_0}. \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

(c) Die Multiplikation ist stetig als Einschränkung der Matrixmultiplikation auf $\mathbb{R}^{n\times n}$. Die Inversion ist stetig, da sie auf Grund der cramerschen Regel komponentenweise stetig ist.

Aufgabe G32 (Abzählbare kompakte Räume)

(a) Sei K ein abzählbarer kompakter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass die Topologie von K eine abzählbare Basis besitzt.
(b) Sei K ein abzählbar unendlicher kompakter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass eine konvergente Folge in K gibt, die nicht stationär wird.

Lösung:

(a) Für $x \neq y$ seien $U_{x,y}$ und $V_{x,y}$ disjunkte offene x bzw. y Umgebungen. Die Menge

$$\{U_{x,y} : x \neq y\} \cup \{V_{x,y} : x \neq y\}$$

ist eine abzählbare Subbasis einer Topologie O auf K. Sie ist Hausdorff und gröber als die ursprüngliche. Daher ist sie gleich der ursprünglichen. Da die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ abzählbar ist hat O eine abzählbare Basis.

(b) Da K eine abzählbare Basis hat reicht es zu zeigen, dass es einen Punkt gibt dessen Umgebungsfilter nur aus Mengen mit Kardinalität größer gleich 2 besteht. Angenommen es gäbe keinen Punkt in K, sodass jede offene Umgebung mindestens Kardinalität 2 hat. Dann hat jeder Punkt eine offene Umgebung mit Kardinalität 1. Damit ist K diskret. Damit müsste K endlich sein. Dies ist ein Widerspruch.

Aufgabe G33 (Transitivität der finalen Topologie)

Der topologische Raum X trage die finale Topologie bezüglich der Abbildungen $f_j \colon X_j \to X$ für $j \in J$. Gegeben $j \in J$ trage der Raum X_j die finale Topologie bezüglich der Abbildungen $f_{j,i} \colon X_{j,i} \to X_j$ für $i \in I_j$. Zeigen Sie, dass X die finale Topologie bezüglich der Abbildungen $f_j \circ f_{j,i} \colon X_{j,i} \to X$ mit $j \in J$ und $i \in I_j$ trägt.

Lösung: $U \subseteq X$ ist offen in X genau dann wenn $f_j^{-1}(U)$ offen in X_j für alle $j \in J$. Dies ist genau dann der Fall wenn $f_{j,i}^{-1}(f_j^{-1}(U))$ offen in $X_{j,i}$ für alle $j \in J$ und $i \in J_i$.