Prof. Dr. Helge Glöckner — Wintersemester 2015/16

27.01.2016

12. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G34 (Kompaktifizierung lokalkompakter Räume)

Zunächst führen wir eine Definition ein:

Definition. Für einen Hausdorfschen topologischen Raum X heißt ein Paar (Y, ι) bestehend aus einem kompakten Raum Y und einer stetigen Abbildung $\iota\colon X \to Y$ *Kompaktifizierung* von X, wenn $\iota(X)$ dicht in Y liegt.

Nun kommen wir zur Aufgabe:

(a) Sei X ein Hausdorfscher topologischer Raum mit der Topologie $\mathcal{O}$. Des weiteren sei $\omega \notin X$ ein beliebiges Element und $X^\star := X \cup \{\omega\}$. Wir definieren

$$\mathcal{O}^\star := \mathcal{O} \cup \{X^\star \setminus A : A \subseteq X \text{ kompakt}\}.$$

Zeigen Sie, dass $(X^\star, \mathcal{O}^\star)$ einen quasikompakten topologischen Raum bildet und die Inklusion $\iota\colon X \to X^\star$ eine topologische Einbettung mit offenem Bild ist.

(b) Zeigen Sie, dass ι genau dann dichtes Bild hat, wenn X nicht kompakt ist.

(c) Zeigen Sie, dass $X^\star$ genau dann ein Hausdorfraum ist, wenn X lokalkompakt ist. Also ist $(X^\star, \iota)$ genau dann eine Kompaktifizierung von X, wenn X ein nicht kompakter lokalkompakter Raum ist. In diesem Fall nennt man $(X^\star, \iota)$ die *Einpunktkompaktifizierung* bzw. *Alexandroff-Kompaktifizierung* von X.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^\star$ homöomorph zu $\mathbb{S}^1$ ist.

Lösung:

(a) Offensichtlich gilt $X^\star = X^\star \setminus \emptyset, \emptyset \in \mathcal{O}^\star$. Seien $U, V \in \mathcal{O}^\star$. Wir zeigen $U \cap V \in \mathcal{O}^\star$. Der Fall $U, V \in \mathcal{O}$ ist klar. Sei $U \in \mathcal{O}$ und $V = X^\star \setminus A$ für A wie oben. Dann $U \cap V = U \cap (X \setminus A) \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}^\star$. Es fehlt der Fall $U = X^\star \setminus A_1, V = X^\star \setminus A_2$ mit A_1, A_2 wie oben. Es gilt $U \cap V = X \setminus (A_1 \cup A_2) \in \mathcal{O}^\star$. Um zu sehen, dass $\mathcal{O}^\star$ abgeschlossen gegenüber beliebigen Vereinigungen ist machen wir die folgende Bemerkung: Sein I und J Mengen. Für $j \in J$ sei A_j wie oben und für $i \in I$ sei $U_i \in \mathcal{O}$. O.B.d.A. seien $I, J \neq \emptyset$. Wir definieren $A := \bigcap_{j \in J}$ und $U := \bigcup_{i \in I} U_i$ und rechnen

$$\bigcup_{i \in I} U_i \cup \bigcup_{j \in J} X^\star \setminus A_i = U \cup (X^\star \setminus A) = X^\star \setminus (X^\star \setminus U \cap A) = X^\star \setminus ((X \setminus U) \cap A) \in \mathcal{O}^\star.$$

Nun zeigen wir, dass $X^\star$ quasikompakt ist. Sei $X^\star = \bigcup_{i\in I} U_i$. Es gibt ein $i_0 \in I$, sodass $\omega \in U_{i_0}$. Dann gibt es $A \subseteq X$ kompakt mit $U_{i_0} = X^\star \backslash A$. Es gilt $A \subseteq \bigcup_{i\neq i_0} U_i$. Wir finden eine endliche Teilüberdeckung, sodass $A \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$. Wir folgern

$$X^\star = A \cup X^\star \setminus A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \cup U_{i_0}.$$

Offensichtlich ist ι offen aufs Bild und hat offenes Bild. Die Stetigkeit von ι ist auch klar.

(b) $\{X^\star \setminus A : A \subseteq X \text{ kompakt}\}$ ist eine Umgebungsbasis von ω. Angenommen X ist nicht kompakt. Sei $A \subseteq X$ kompakt. Dann ist $X \backslash A \neq \emptyset$. Somit gilt $X \cap (X^\star \backslash A) \neq \emptyset$. Es folgt, dass X dicht liegt. Angenommen, dass X dicht liegt. Wäre X kompakt, dann wäre $X^\star \setminus X = \{\omega\}$ eine ω-Umgebung. Es folgt, dass X nicht dicht liegt. Dies ist ein Widerspruch.

(c) Sei X lokalkompakt und $x \in X$. Dann finden wir eine kompakte x-Umgebung $V \subseteq X$. $X^\star \setminus V$ ist eine ω-Umgebung. Es folgt, dass $X^\star$ Hausdorf ist. Sei nun $X^\star$ Hausdorf. Wir wissen, dass $X^\star$ kompakt ist. Damit ist $X^\star$ auch lokalkompakt. Da X offen in $X^\star$ liegt, folgt, dass auch X lokalkompakt ist.

(d) Sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to]0,1[$ ein Homöomorphismus. Die Abbildung

$$\tau\colon R^\star \to \mathbb{S}^1,\ x \mapsto \begin{cases} e^{2\pi i \varphi(x)} : x \in \mathbb{R} \\ 1 : x = \omega. \end{cases}$$

ist bijektiv. Wir wollen zeigen, dass τ stetig ist. Da $\mathbb{R}^\star$ das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, reicht es die Folgenstetigkeit zu überprüfen. Außerdem reicht es die Stetigkeit in ω zu testen. Sei $x_n \to \omega$ mit $x_n \neq \omega$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt $\delta > 0$, sodass $|e^{2\pi i y} - 1| < \varepsilon$ für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y-0| < \delta$ oder $|y-1| < \delta$. $A := \varphi^{-1}([\delta, 1-\delta])$ ist kompakt in $\mathbb{R}$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \notin K$ für alle $n \geq N$. Also $|\tau(x_n) - 1| < \varepsilon$. Da $\mathbb{R}^\star$ kompakt ist, folgt, dass τ ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe G35 (Der Raum der Folgen ist nicht normierbar)

Zeigen Sie, dass es keine Norm auf $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ gibt die die gegebene Produkttopologie beschreibt.

Lösung: Angenommen es gäbe eine Norm $\|\bullet\|$ die die Topologie von $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ beschreibt. Dann wäre die Kugel $B_1(0)$ eine offene 0-Umgebung. Jedoch bilden Mengen der Form $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mit $A_n \neq \mathbb{R}$ für nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ eine Basis der Topologie. Also enthält $B_1(0)$ einen echten Unterraum. Insbesondere existiert $v \neq 0$ mit $\mathbb{R}v \subseteq B_1(0)$. Es gilt aber $\|\lambda v\| = \lambda \|v\| \to \infty$.

Aufgabe G36 (Quotientenabbildungen)

Seien X und Y topologische Räume und $q\colon X \to Y$ eine Quotientenabbildung. Zudem sei $Z \subseteq Y$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass $q|_{q^{-1}(Z)}^{Z}\colon q^{-1}(Z) \to Z$ eine Quotientenabbildung ist, wenn

(i) q eine abgeschlossene Abbildung ist.
(ii) Z offen oder abgeschlossen ist.

Lösung:

(a) Da $q|_{q^{-1}(Z)}^{Z} \colon q^{-1}(Z) \to Z$ noch immer eine abgeschlossene Abbildung ist folgt die Aussage.

(b) Seien Z offen und $g := q|_{q^{-1}(Z)}^{Z}$. Zudem sei $U \subseteq Z$, sodass $g^{-1}(U) \subseteq q^{-1}(Z)$ offen ist. Es folgt, dass $g^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist. Dmait ist $U \subseteq Y$ offen. Es folgt, dass U in Z offen ist. Denn Fall, dass Z abgeschlossen ist, behandelt man analog.