Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2015/16
03.02.2016

13. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G37 (Topologische Gruppen)

Sei $(A,+)$ eine abelsche topologische Gruppe.

(a) Sei $K \subseteq S$ eine kompakte Teilmenge, $U \subseteq A$ offen mit $K \subseteq U$. Zeigen Sie, dass es eine offene 0-Umgebung $V \subseteq A$ gibt, sodass $K + V \subseteq U$.
(b) Sei $U \subseteq A$ eine 0-Umgebung und $W \subseteq A$ eine 0-Umgebung mit $W+W \subseteq U$. Zeigen Sie $\overline{W} \subseteq U$.

Lösung:

(a) Sei $\alpha\colon A\times A \to A$, $(x,y)\mapsto x+y$ die Addition auf A. Es gilt $K\times\{0\} \subseteq \alpha^{-1}(U)$. Da α stetig ist folgern wir mit dem Lemma von Wallace die Existenz eine 0-Umgebung V, sodass $K + V \subseteq U$.
(b) Sei $x \in \overline{W}$. Daraus folgt $(x - W) \cap W \neq \emptyset$. Also gilt $x \in W + W$ und somit $\overline{W} \subseteq W + W \subseteq U$.

Aufgabe G38 (Die Topologie der kompakten Konvergenz)

Sei X ein Hausdorffscher topologischer Raum, A eine abelsche topologische Gruppe.

(a) Für $f \in C(X,A)$, $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq A$ offene 0-Umgebung definieren wir die Menge

$$\mathcal{U}_{f,K,U} := \{g \in C(X,A) : (g-f)(K) \subseteq U\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\{\mathcal{U}_{f,K,U} : f \in C(X,A), K \subseteq A \text{ kompakt}, U \subseteq A \text{ offene 0-Umgebung}\}$$

eine Basis für eine Topologie $\mathcal{O}_c$ auf $C(X,A)$ bildet.
(b) Zeigen Sie, dass $C(X,A)$ ausgestattet mit dieser Topologie eine topologische Gruppe ist.

Lösung:

(a) Sei $g \in \mathcal{U}_{f_1,K_1,U_1} \cap \mathcal{U}_{f_2,K_2,U_2}$. Es gibt eine 0-Umgebung $W \subseteq A$ mit $g - f_1(K_1) + W \subseteq U_1$ und $g - f_2(K_2) + W \subseteq U_2$ (siehe oben). Es folgt

$$\mathcal{U}_{g,(K_1\cup K_2),W} \subseteq \mathcal{U}_{f_1,K_1,U_1} \cap \mathcal{U}_{f_2,K_2,U_2}.$$

(b) Mit einem ähnlichen Argument sieht man leicht, dass die Mengen der Form $\mathcal{U}_{f,K,U}$ eine Umgebungsbasis von f liefert. Seien $f, g \in C(X, A)$, $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq A$ eine offene 0-Umgebung. Sei nun $W \subseteq A$ eine 0-Umgebung, sodass $W + W \subseteq U$ (Stetigkeit der Addition auf A). Es gilt $\mathcal{U}_{f,K,W} + \mathcal{U}_{g,K,W} \subseteq \mathcal{U}_{f+g,K,U}$. Es folgt die Stetigkeit der Addition. Sei nun $V \subseteq A$ eine offene 0-Umgebung, sodass $-V \subseteq W$. Es gilt $\mathcal{U}_{f,K,V} \subseteq \mathcal{U}_{-f,K,U}$. Es folgt die Stetigkeit der Inversion.

Aufgabe G39 (Auswertungsabbildung)

Sei X ein Hausdorffscher topologischer Raum, A eine abelsche topologische Gruppe. Zeigen Sie, dass die Auswertungsabbildung

$$\varepsilon\colon C(X, A) \times X \to A,\ (f, x) \mapsto f(x)$$

stetig ist, wenn X lokalkompakt ist.

Lösung: Seien $f \in C(X, A)$, $x \in X$ und $U \subseteq A$ eine $f(x)$-Umgebung. Sei $K \subseteq f^{-1}(U)$ eine kompakte x-Umgebung und $W \subseteq A$ eine 0-Umgebung, sodass $W + f(K) - f(x) \subseteq U - f(x)$ (siehe G 37). Wir folgern $W + f(K) \subseteq U$. Seien nun $h \in \mathcal{U}_{f,K,W}$ und $y \in K$. Wir folgern

$$h(y) = h(y) - f(y) + f(y) \in W + f(K) \subseteq U.$$