Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2015/16
10.02.2016

14. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G40 (Der Satz von Montel)

Wir definieren $\mathbb{D}_r := B_r^{\mathbb{C}}(0)$. Seien $1 > r > s > 0$ und $\Gamma \subseteq \mathrm{Hol}(\mathbb{D}_1)$, sodass

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} \|f|_{\mathbb{D}_r}\|_\infty < \infty.$$

Zeigen Sie, dass $\Gamma|_{\overline{\mathbb{D}}_s} := \left\{ f|_{\overline{\mathbb{D}}_s} : f \in \Gamma \right\}$ relativ kompakt in $C(\overline{\mathbb{D}}_s)$ ist.

Lösung: Seien $\sup_{\gamma\in\Gamma} \|f|_{\mathbb{D}_r}\|_\infty =: M < \infty$ und $x \in \overline{\mathbb{D}}_s$. Dann $|f(x)| \leq M$ für alle $f \in \Gamma$. Somit ist Γ punktweise relativ kompakt. Sei $x \in \mathbb{D}_s$ und $\delta := \frac{r-s}{2}$. Dann $\overline{B}_\delta(x) \subseteq \mathbb{D}_r$ und es gilt

$$|f'(x) \leq \max\left\{ |f(y)| : y \in \partial\overline{B}_\delta(x) \right\} \leq M.$$

Wir folgern $\|f'|_{\mathbb{D}_s}\|_\infty \leq M$ für alle $f \in \Gamma$. Seien nun $x, y \in \mathbb{D}_s$. Es gilt

$$|f(y) - f(x)| = \left| \int_0^1 f'((1-t)x + ty)(y-x)dt \right| \leq M \cdot |y - x|.$$

Somit ist $\Gamma|_{\mathbb{D}_s}$ gleichgradig stetig. Die Behauptung folgt aus dem Satz von Ascoli.

Aufgabe G41 (Existenzsatz von Peano)

Seien $y_0 \in \mathbb{R}$, $T, R \in]0, \infty[$ und $f\colon [0,T] \times [y_0 - R, y_0 + R] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $M := \|f\|_\infty < \infty$. Wir wählen $\varepsilon \in]0, T]$ so klein, dass $\varepsilon \cdot M \leq R$ und definieren

$$\mathcal{L} := \{\varphi\colon [0,\varepsilon] \to \mathbb{R} : \varphi \text{ ist Lipschitz-stetig mit } \mathrm{Lip}(\varphi) \leq M \text{ und } \varphi(0) = y_0\}.$$

Zeigen Sie, dass

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ eine relativ kompakte Teilmenge von $(C([0,\varepsilon],\mathbb{R}), \|\bullet\|_\infty)$ ist.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren $u_{n,0} := y_0$. Zeigen Sie, dass die Definition $u_{n,k+1} := u_{n,k} + \frac{\varepsilon}{n} f(\frac{k}{n}\varepsilon, u_{n,k})$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$ sinnvoll ist.

(c) Man kann den Polygonzug, der sukzessive die Punkte $(0, u_{n,0}), \ldots, (\varepsilon, u_{n,n})$ miteinander verbindet als Graph einer Funktion $\varphi_n\colon [0,\varepsilon] \to \mathbb{R}$ auffassen. Geben Sie eine Funktionsvorschrift für φ_n an.

(d) Zeigen Sie, dass es eine Teilfolge $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen eine stetige Funktion $\varphi\colon [0,\varepsilon] \to \mathbb{R}$ konvergiert.

(e) Zeigen Sie, dass φ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

löst.

Lösung:

(a) Da alle $\varphi \in \mathcal{L}$ eine Lipschitzkonstante kleiner gleich M haben, ist $\mathcal{L}$ gleichgradig stetig. Sei $x \in [0, \varepsilon]$. Für $\varphi \in \mathcal{L}$ rechnen wir

$$|\varphi(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(0)| + |\varphi(0)| \leq M\varepsilon + |y_0|.$$

Somit ist $\mathcal{L}$ punktweise relativ kompakt. Es folgt die Aussage.

(b) Wir führen eine Induktion nach k durch. Für $k \leq n$ sei $u_{n,k}$ sinnvoll definiert und es gelte $|u_{n,k} - y_0| < \frac{k}{n}\varepsilon M$. Dann ist $u_{n,k+1}$ sinnvoll definiert, denn $\frac{\varepsilon}{n}\varepsilon \in [0, T]$ und $|u_{n,k} - y_0| < \frac{k}{n}\varepsilon M \leq R$. Wir rechnen

$$|u_{n,k+1} - y_0| \leq |u_{n,k} - y_0| + \frac{\varepsilon}{n}|f(\frac{k}{n}\varepsilon, u_{n,k})| \leq \frac{k}{n}\varepsilon M + \frac{\varepsilon}{n}M = \frac{k+1}{n}\varepsilon M.$$

(c) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$. Wir definieren $\tau \colon [\frac{k\varepsilon}{n}, \frac{(k+1)\varepsilon}{n}] \to [0,1]$, $t \mapsto (t - \frac{k\varepsilon}{n})\frac{n}{\varepsilon}$ und $\varphi_{n,k} \colon [\frac{k\varepsilon}{n}, \frac{(k+1)\varepsilon}{n}] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto u_{n,k}(1 - \tau(t)) + u_{n,k+1}\tau(t)$. φ_n ist nun die Zusammensetzung der Abbildungen $\varphi_{n,k}$.

(d) Es gilt

$$|\varphi_{n,k}'(t)| = |-u_{n,k}\tau'(t) + u_{n,k+1}\tau'(t)| = |f(\frac{k}{n}\varepsilon, u_{n,k})| \leq M.$$

Sei nun $t_1 \in [\frac{k\varepsilon}{n}, \frac{(k+1)\varepsilon}{n}]$ und $t_2 \in [\frac{(k+l)\varepsilon}{n}, \frac{(k+l+1)\varepsilon}{n}]$. Wir rechnen

$$|\varphi_n(t_1) - \varphi_n(t_2) \leq |\varphi_n(t_1) - u_{n,k+1}| + \sum_{j=1}^{l-1} |u_{n,k+j} - u_{n,k+j+1}| + |u_{n,k+l} - \varphi_k(t_2)|$$
$$\leq M(\frac{k+1}{n}\varepsilon - t_1) + (l-1)(M\frac{\varepsilon}{n}) + M(t_2 - \frac{\varepsilon(k+l)}{n}) = M(t_2 - t_1).$$

(e) Dies folgt direkt aus dem Satz von Ascoli und dem Satz von Bolzano-Weierstraß für metrische Räume.

(f) Sei $\sigma > 0$. Wir zeigen $|\varphi(t) - y_0 - \int_0^t f(s, \varphi(s))ds| < \sigma$ für alle t. Die Abbildung f ist gleichmäßig stetig. Daher gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)| < \frac{\sigma}{\varepsilon}$ für alle $|t_1 - t_2|, |y_1 - y_2| < \delta$. Sei nun $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{\varepsilon}{N} < \delta$ und $\frac{\varepsilon}{N} < \delta$. Dann gilt für $n \geq N$ und $s \in [\frac{k}{n}\varepsilon, \frac{k+1}{n}\varepsilon]$ die Rechnung

$$|\varphi_n'(s) - f(s, \varphi_n(s))| = |f(\frac{k}{n}\varepsilon, u_{n,k}) - f(s, \varphi_n(s))| < \frac{\sigma}{\varepsilon},$$

denn $|s - \frac{k}{n}\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{n} < \delta$ und $|u_{n,k} - \varphi_n(s)| \leq |u_{n,k} - u_{n,k+1}| \leq \frac{\varepsilon}{n}M < \delta$. Nun gilt für $n \geq N$

$$
\begin{aligned}
&|\varphi_n(t) - y_0 - \int_0^t f(s, \varphi_n(s))ds| = |y_0 + \int_0^t \varphi_n'(s)ds - y_0 - \int_0^t f(s, \varphi_n(s))ds| \\
&\leq \int_0^t |\varphi_n'(s) - f(s, \varphi_n(s))| < \sigma.
\end{aligned}
$$

Es folgt die Aussage.