Vorbesprechung zum Proseminar Analysis

Prof. Dr. Helge Glöckner

26. Februar 2025

Überblick

- Allgemeines zum Proseminar
- Behandelte Themenkreise
- Mitteilen Ihrer Präferenzen

Allgemeines

Das Proseminar findet freitags von 11:00-13:00 Uhr statt und hat 14–15 Sitzungen.

Vortragszeit:

maximal 90 Minuten (Tafelvorträge)

Nach der Hälfte der Vortragszeit je 10 Minuten Pause!

Zu jedem Vortrag gibt es drei **verpflichtende Vorbesprechungen**, zu denen individuell Termine vereinbart werden.

Themengebiete

Themengebiet 1: Metrische Räume

Metrische Räume (X, d) haben wir bereits in der Analysis 1 kennengelernt und sie werden in der Analysis 2 wiederholt. Wir haben also eine Menge X gegeben für alle $x, y \in X$ ist ein **Abstand** $d(x, y) \geq 0$ festgelegt.

Verschiedene Fragen werden beleuchtet:

Vervollständigungen und Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$

Aus der Analysis 1 wissen Sie, dass $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt: Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert einer Folge in $\mathbb{Q}$. Weiter ist $\mathbb{R}$ vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.

Analog lässt sich zu jedem metrischen Raum X ein vollständiger metrischer Raum finden, der X als dichte Teilmenge enthält. Dies kann benutzt werden, um $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ zu konstruieren, insb. die Existenz des Körpers der reellen Zahlen zu zeigen (Vorträge 1+2).

Produkte metrischer Räume und die Cantormenge

Für jede Folge metrischer Räume (X_n, d_n) kann auch $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ zu einem metrischen Raum gemacht werden. Nehmen wir $X_n := \{0,1\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so ist also insbesondere die Menge

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Folgengliedern in $a_n \in \{0,1\}$ ein metrischer Raum. Diese Folgen parametrisieren die sogenannte **Cantormenge** $C \subseteq [0,1]$, die man erhält, wenn man aus $[0,1]$ zuerst das mittlere Drittel entfernt, dann aus den verbleibenden zwei Teilintervallen je das mittlere Drittel, etc.; die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liefert die Zahl $\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n/3^n \in C$ im Dreiersystem (Vortrag 3).

Der Bairesche Kategoriensatz. In Vortrag 9 lernen wir den Baireschen Kategoriensatz kennen. Dies ist ein Satz über vollständige metrische Räume, der in der Analysis (und Funktionalanalysis) oft für Existenzaussagen genutzt werden kann. Exemplarisch benutzen wir den Satz, um die Existenz von stetigen Funktionen zu zeigen, die nirgends differenzierbar sind.

Konvergenz von Funktionenfolgen. Es seien $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbare Funktionen (C^∞-Funktionen) und es gelte $f_n(x) \to f(x)$ punktweise für eine Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir lernen zusätzliche Bedingungen kennen, die garantieren, dass f eine C^∞-Funktion ist (Vortrag 5). Auch diskutieren wir gleichmäßige Grenzwerte von Treppenfunktionen, sog. **Regelfunktionen** (Vrtrg 4).

Themengebiet 2: Approximation von Funktionen durch Polynome bzw. trigonometrische Polynome

Wir beweisen den **Weierstraßschen Approximationssatz**: Für jede stetige Funktion $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Polynomfunktion $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$(\forall x \in [a, b]) \qquad |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

(Vortrag 8). Ist $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische stetige Funktion, so lässt sich f analog durch sogenannte **trigonometrische Polynome**

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k \, e^{ikx}$$

approximieren (bzw. durch endliche Linearkombinationen entsprechender Sinus- und Cosinusfunktionen). Wir diskutieren dann Zusatzannahmen, die gewährleisten, dass $f(x)$ als Fourierreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{ikx}$ darstellbar ist für verschiedene Konvergenzbegriffe (Vorträge 10, 11, 12).

Themengebiet 3: Konstruktion und Eigenschaften von Funktionen

Satz von Borel. In Vortrag 6 werden nützliche oder interessante Beispiele von C^∞-Funktionen konstruiert. Zum Beispiel gibt es für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen eine C^∞-Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit den vorgegebenen Ableitungen am Ursprung:

$$(\forall n\in\mathbb{N}_0)\quad f^{(n)}(0)=a_n.$$

Kettenregel für Taylorpolynome. Vortrag 7 ist Taylorpolynomen gewidmet; es wird die Kettenregel zur Berechnung des Taylorpolynoms einer Komposition $f\circ g$ vorgestellt.

Konvexe Funktionen und Ungleichungen. Wir lernen konvexe Funktionen $f\colon I\to\mathbb{R}$ auf einem Intervall $I\subseteq\mathbb{R}$ kennen, Beispiele und Eigenschaften.

Konvexität nutzt z.B. beim Beweis von einigen wichtigen Ungleichungen der Analysis, z.B. der Hölderschen Ungleichung (Vorträge 13 und 14).

Weiteres Vorgehen

Teilen Sie Ihre Präferenzen für Ihr Vortragsthema bis 16.3.2025 per Email mit an glockner@math.upb.de (bitte mehrere Präferenzen!)

Seminaranmeldung

Eigene Anmeldezeiträume für Seminare/Proseminare in PAUL! Zusätzlich muss im gleichen Zeitraum via PAUL die **Anmeldung für Vortrag/Prüfung** erfolgen!

Die Teilnahme an drei Vortrags-Vorbesprechungen ist verbindlich und wird als **qualifizierte Teilnahme** gewertet.

Nach Zuweisung der Themen bekommen Sie einen Terminvorschlag für einen ersten Vorbesprechungstermin sowie (falls nicht sowieso elektronisch verfügbar) Materialien zum Vortragsthema.