

Seminar “Maßtheorie und Topologie,” SoSe 2023

Prof. Dr. Helge Glöckner

Vorbesprechung

2. März 2023

Das Seminar vertieft die (in der Analysis 3 begonnene) Maß- und Integrationstheorie.

Im Hinblick darauf (und für die Allgemeinbildung) wird auch die Topologie etwas vertieft.

Es gibt vier Gruppen von je 3-4 Vorträgen:

Themenblöcke

- 1 Vertiefung der Topologie (4 Vorträge)
- 2 Maße auf lokal kompakten Räumen und der Rieszsche Darstellungssatz für positive Funktionale (3 Vorträge)
- 3 Komplexe Maße und der Satz von Radon-Nikodym (4 Vorträge)
- 4 Absolut stetige Funktionen, Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung (3 Vorträge)

Vortrag 1:

Konvergenz von Netzen und Filtern, initiale und finale Topologien, Quotiententopologie, induzierte Topologie, Produkttopologie; Trennungseigenschaften (Hausdorff-Eigenschaft, Regularität, Normalität, vollständige Regularität)

Vortrag 2:

Lokal kompakte Räume, Urysohnsches Lemma; σ -Kompaktheit, Partitionen der 1

Vortrag 3:

Parakompaktheit, lokale Endlichkeit, Partitionen der 1

Vortrag 4:

Kompakt-offene Topologie und deren Eigenschaften; Exponentialgesetz

Maße auf lokal kompakten Räumen, Rieszscher Darstellungssatz für positive Funktionale

Sei X ein lokal kompakter topologischer Raum, z.B. $X = \mathbb{R}^n$ (X ist Hausdorffsch und jeder Punkt hat eine kompakte Umgebung). Sei $C_c(X)$ der Vektorraum der stetigen Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger.

Rieszscher Darstellungssatz

Sei $I: C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung derart, dass $I(f) \geq 0$ für jedes $f \geq 0$. dann existiert genau ein von außen reguläres Borelmaß μ auf X derart, dass

$$I(f) = \int_X f \, d\mu \quad \text{für alle } f \in C_c(X).$$

Beispiel

$X = \mathbb{R}$, $I(f) := \int_a^b f(x) \, dx$, wenn f außerhalb $[a, b]$ verschwindet. Dann ist μ das Lebesgue-Borel-Maß (insb. existiert dieses).

Maße auf lokal kompakten Räumen und der Rieszsche Darstellungssatz für positive Funktionale

Vorträge 5–7:

Maße auf lokal kompakten Räumen

Rieszscher Darstellungssatz für positive Funktionale

Regularitätseigenschaften von Borel-Maßen

Stetigkeits-Eigenschaften messbarer Funktionen

Literatur: W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill
(auch auf Deutsch: “Reelle und komplexe Analysis”)

Es sei $\mathcal{S}$ eine σ -Algebra auf einer Menge X . Eine Abbildung $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *komplexes Maß*, wenn sie σ -additiv ist, also

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

in $\mathbb{C}$ für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen $A_n \in \mathcal{S}$.

Satz von Radon-Nikodym

Sei ν ein σ -endliches Maß auf $(X, \mathcal{S})$ und μ ein komplexes Maß. Genau dann hat μ eine Dichte ρ bzgl. ν , also

$$\mu(A) = \int_A \rho \, d\nu \quad \text{für alle } A \in \mathcal{S},$$

wenn $\mu(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{S}$ mit $\nu(A) = 0$.

Vortrag 8:

Komplexe Maße, Totalvariation, Jordan-Zerlegung

Vortrag 9:

Absolutstetigkeit von Maßen, Satz von Radon-Nikodym

Vortrag 10:

Anwendungen, insb. Hahn-Zerlegung, Polarzerlegung.

Vortrag 11:

Rieszscher Darstellungssatz für stetige lineare Funktionale

$$I: C_0(X) \rightarrow \mathbb{C}$$

Ziel: $I(f) = \int_X f \, d\mu$ mit komplexem Maß μ

Absolut stetige Funktionen und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *absolut stetig*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass

$$\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle disjunkten Teilintervalle $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ in $[a, b]$ mit Gesamtlänge $< \delta$.

Satz

Genau dann ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ absolut stetig, wenn es eine L^1 -Funktion $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit

$$f(t) = \int_a^t g(s) ds \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

Weiter ist f für fast alle $t \in [a, b]$ differenzierbar und $f'(t) = g(t)$.



Absolut stetige Funktionen und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Vorträge 12–14

Allgemeines zum Seminar

Für jeden Seminarteilnehmer/jede Teilnehmerin werden drei Vorbesprechungstermine (individuell oder für die Themengruppe) vereinbart.

Aktive Teilnahme an Vorbesprechungen = **qualifizierte Teilnahme**

Der Vortrag ist die **Prüfungsleistung**, eine Vortragsausarbeitung keine Pflicht.

Bitte Präferenzen (gleich mehrere!) für ein Vortragsthema per Email mitteilen an Prof. Glöckner, glockner@math.upb.de, bis einschließlich Sonntag, 12.03.2023. Es werden dann auch mögliche alternative Seminartermine eruiert werden, da der momentane Termin nicht für alle passt.