Überblick über Masterseminar Unendlichdimensionale Topologie im WS 2023/24

Prof. Dr. Helge Glöckner

24. September 2023

Themenfeld

Im Seminar soll der Artikel

Homotopy theory of infinite dimensional manifolds, Topology 5 (1966), 1-16

von R. S. Palais gemeinsam erarbeitet werden, in welchem viele grundlegende Resultate über die Topologie unendlich-dimensionaler Mannigfaltigkeiten zusammengestellt sind.
Unter anderem zeigt Palais, dass jede metrisierbare, auf lokal konvexen topologischen Vektorräumen modellierte Mannigfaltigkeit durch einen simplizialen Komplex dominiert wird – dieses Ziel wollen wir zuerst ansteuern.

Vorbereitende Themen sind u.a. Parakompaktheit und Partitionen der Eins, Metrisierbarkeitssätze und der Fortsetzungssatz von Dugundji.

Vortragsthemen

Vorträge 1–4: **Parakompakte Räume und Partitionen der Eins** (am 10.10., 17.10., 24.10. und 31.10.)

Urysohnsches Lemma für normale Räume und der Tietzesche Fortsetzungssatz; lokal endliche Mengensysteme, Parakompaktheit und Partitionen der Eins. Charakterisierungen parakompakter Räume. Jeder metrische Raum ist parakompakt.

Literatur: von Querenburg, Seiten 74–81 und 104–108.

Vortrag 5: **Metrisierbarkeitssätze für unendlich-dimensionale Mannigfaltigkeiten** (7.11.)

Vorzustellen sind Theorem 1, Theorem 2 und dessen zwei Folgerungen aus der Arbeit von Palais, mit Beweis (eventuell auch Theorem 3 und dessen Folgerung).

Vortrag 6: **Der Fortsetzungssatz von Dugundji** (14.11.)

Formulierung und Beweis des Satzes (siehe u.a. Dugundjis Originalarbeit).

Für jeden metrischen Raum X und jede stetige Abbildung $f\colon A \to C$ einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq X$ in eine konvexe Teilmenge C eines lokal konvexen topologischen Vektorraums existiert eine stetige Fortsetzung $\widetilde{f}\colon X \to C$.

Vorträge 7 und 8: **Absolute Retrakte und absolute Umgebungsretrakte** (am 21.11 und 28.11.)

Vorstellung der Begriffe, Beweis von Lemma 2.1 und Lemma 2.2 der Arbeit von Palais (inklusive der relevanten Beweise aus Hanners Arbeit); Beweis von Theorem 4, Theorem 5 und dessen Folgerung.

Vorträge 9 und 10: **Dominieren durch simpliziale Komplexe** (am 5.12. und 12.12.)

Beweis von Theorem 13 und Theorem 14 der Arbeit von Palais.

Vortrag 11: **Offene Teilmengen lokal konvexer Räume** (19.12.)

Schneiden mit einem dichten Untervektorraum erhält den Homotopietyp sowie Übergang zur Topologie der endlich-offenen Mengen (Theorem 12 bei Palais und seine Folgerung mit Beweis)

Vortrag 12: **Ergänzungen** (9.1.)

Formulierung und Beweis von Theorem 6, 7 und 8 von Palais sowie Theorem 9.

Vorträge 13 und 14: **Der Satz von Kuiper** (am 16.1. und 23.1.)

Berechnung der Homotopiegruppen für die unitäre Gruppe $U(\mathcal{H})$ eines unendlich-dimensionalen, separablen komplexen Hilbertraums gemäß Kuipers Arbeit. Beweis, dass $U(\mathcal{H})$ kontrahierbar ist.

Vortrag 15: **Die Auswahlsätze von Michael** (30.1.)

Vorstellung von Theorem 10 und 11 aus der Arbeit von Palais. Darstellung von etwas Hintergrund aus E. Michaels Originalarbeit (oder wenigstens Beweis eines einfacheren Auswahlsatzes von Michael, wie Proposition 12 in Kapitel II, §4, no. 7 bei Bourbaki)

Literatur

- Bourbaki, N., "Topological Vector Spaces, Chapters 1–5," Springer, Berlin, 1987.
- Dugundji, J., *An extension of Tietze's Theorem*, Pac. J. Math. **1** (1951), 353–367.
- Hanner, O., *Some theorems on absolute neighborhood retracts*, Ark. Mat. **1** (1951), 389–408.
- Kuiper, N. H., *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space*, Topology **3** (1965), 19–30.
- Michael, E., *Convex structures and continuous selections*, Can. J. Math. **11** (1959), 556–575.
- Palais, R. S., *Homotopy theory of infinite dimensional manifolds*, Topology **5** (1966), 1-16.
- von Querenburg, B., "Mengentheoretische Topologie," Springer, Berlin, ^{2}1979.
- Schubert, H., "Topologie," B. G. Teubner, Stuttgart, 1964.
- Wojdysławski, M., *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*, Fundam. Math. **32** (1939), 184–192.