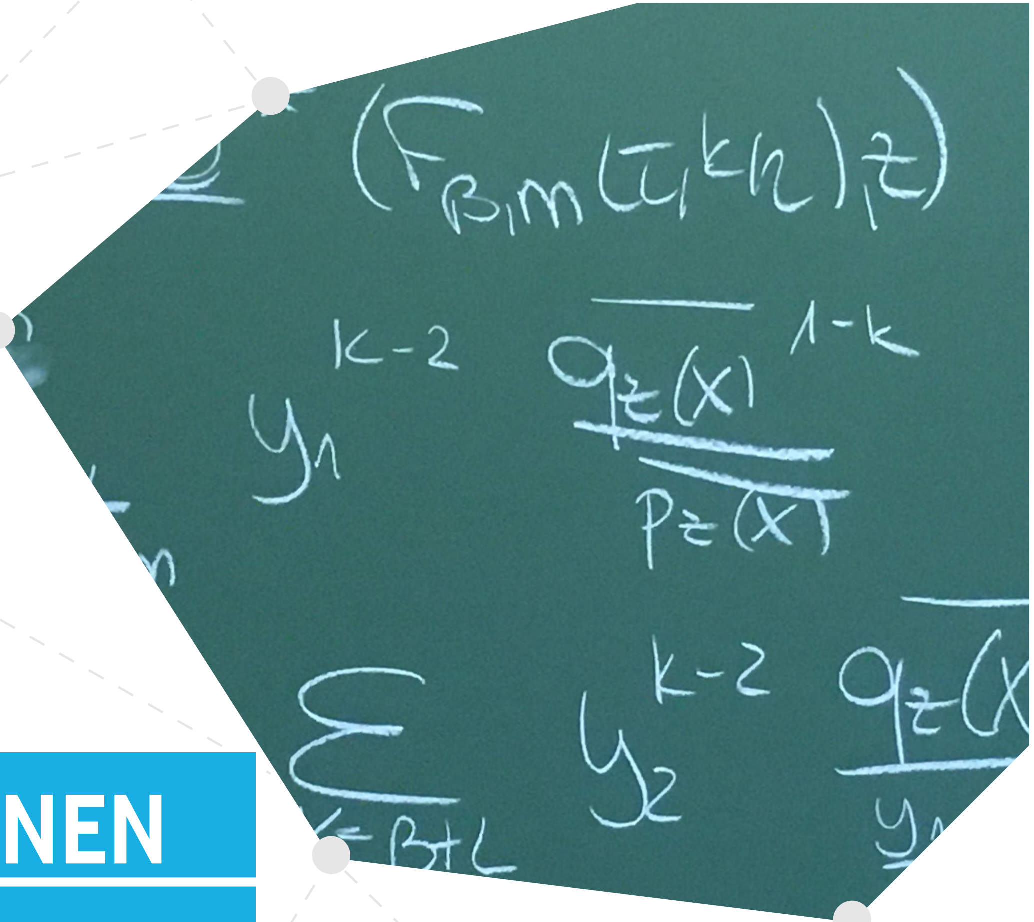
UNIVERSITÄT PADERBORN



ERZEUGENDE FUNKTIONEN VON SPUREN VON CM WERTEN UND GEODÄTEN VON MODULAREN FUNKTIONEN

Jun.-Prof. Dr. Claudia Alfes-Neumann

18. Mai 2020

UNIVERSITÄT PADERBORN

Outline

Erzeugendenreihen und Modulformen

Modulformen

CM Punkte und Geodäten

Erzeugende Funktionen von Spuren von CM Werten und Geodäten von Modulfunktionen

Thetalifts

Zahlentheoretische Funktionen

- Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a(n)$ eine zahlentheoretische Funktion.
- Beispiel 1: $r_2(n) = \#\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a^2 + b^2 = n\}$
  - Es ist $5 = 1^2 + 2^2$, also $r_2(5) \geq 1$.
  - Für welche n ist $r_2(n) \neq 0$?
- Beispiel 2: $p(n) = \#$ Möglichkeiten, n als Summe von Zahlen $\leq n$ zu schreiben (Partitionsfunktion).
  - $p(5) = 7$, $p(100) = 190\,569\,292$.
  - Wie wächst $p(n)$?
  - Formel für $p(n)$?

UNIVERSITÄT PADERBORN

Zahlentheoretische (und andere) Funktionen

- Weitere Beispiele: Teilersummenfunktion, Funktionen aus der Physik, Funktionen aus der Geometrie, ...
- Fragen:
  - Für welche n ist $a(n) \neq 0$?
  - Wie wächst $a(n)$?
  - Gibt es eine Formel für $a(n)$?
  - Kann man Aussagen über die Rationalität der $a(n)$ machen?

UNIVERSITÄT PADERBORN

Erzeugendenreihen zahlentheoretischer Funktionen

- Sei q eine formale Variable.
- Betrachten:

$$f(q) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n = a(1)q + a(2)q^2 + a(3)q^3 + \dots .$$

- Setze $q = e^{2\pi i z}$, wobei $z \in \mathbb{H}$, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

mit Glück $\quad\rightsquigarrow\quad$ $f(z)$ ist eine Modulform

Warum Glück?

Die Operation der Modulgruppe

- Sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die komplexe obere Halbebene.
- Sei $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}^{2\times 2} \,:\, ad - bc = 1\}$.
- Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert auf $\mathbb{H}$ durch *Möbiustransformationen*

$$Mz = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

- $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wird von $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ erzeugt.
- Sei p prim und $\Gamma_0(p) := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,:\, c \equiv 0 \pmod{p}\}$.

Von nun an:

- $z \in \mathbb{H}$, $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $q = e^{2\pi i z}$

Modulformen

Definition

Sei $k \in \mathbb{Z}$. Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt *Modulform vom Gewicht k zu* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, wenn gilt:

1. $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$, für alle $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
2. f ist holomorph in ∞.

Bemerkung

Die Matrix $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ induziert die Abbildung $z \mapsto z+1$. Die Funktion f besitzt also in der Spitze ∞ eine Fourierentwicklung der Form

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a(n) q^n, \quad q = e^{2\pi i n z}.$$

Eigenschaften von Modulformen

- Der Raum von Modulformen von festem Gewicht ist endlich-dimensional.
- Sind zwei Modulformen im selben Raum bestehen also Beziehungen zwischen ihren Fourierkoeffizienten.
- Man kennt die Erzeuger (Eisensteinreihen und Spitzenformen).

UNIVERSITÄT PADERBORN

Zurück zu den Erzeugendenreihen - Darstellungsanzahlen

- Die Funktion
$$\theta^2(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_2(n) q^n$$
ist eine Modulform vom Gewicht 1 (mit Charakter).
- Dieser Raum ist eindimensional und der Erzeuger ist eine Eisensteinreihe.
- Die zwei Modulformen sind bis auf eine Konstante gleich.
- Ein Vergleich der Fourierkoeffizienten liefert
$$r_2(n) = 4 \sum_{d \mid n, d > 0 \text{ ungerade}} (-1)^{(d-1)/2}.$$
- $\Rightarrow$ Jede Primzahl $p \equiv 1 \pmod 4$ ist die Summe von zwei Quadraten (Fermat).

UNIVERSITÄT PADERBORN

Zurück zu den Erzeugendenreihen - Die Partitionsfunktion

- Die Funktion

$$q^{-1/24}\sum_{n=1}^{\infty} p(n)q^n \left(= \frac{1}{\eta(z)}\right)$$

  ist eine (schwach holomorphe) Modulform vom Gewicht $-1/2$.
- $\Rightarrow$ Hardy-Ramanujan/Rademacher: asympotische bzw. exakte Formel für $p(n)$ mittels Kreismethode.
- $\Rightarrow$ Bruinier-Ono: $p(n) =$ endliche Summe von algebraischen Zahlen.

Erzeugendenreihen - weitere Beispiele

- Hurwitzsche Klassenzahl
- zentrale L-Werte von elliptischen Kurven
- Dimensionen der irreduziblen Darstellungen des Monsters
- ....

Binäre quadratische Formen

- Eine binäre quadratische Form ist ein Polynom

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

  mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
- Die *Diskriminante* von Q ist definiert als $D = b^2 - 4ac \equiv 0, 1 \mod 4$.
- Sei $\mathcal{Q}_D$ die Menge aller binären quadratischen Formen der Diskriminante D.
- $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert auf $\mathcal{Q}_D$ mit endlich vielen Bahnen, d.h. $\mathcal{Q}_D/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist endlich.

UNIVERSITÄT PADERBORN

CM Punkte

- Sei $D < 0$ und $Q = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ eine quadratische Form der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$.
- Die Gleichung
$$0 = az^2 + bz + c = Q(z, 1)$$
besitzt eine eindeutige Lösung $z_Q \in \mathbb{H}$.
- z_Q heißt CM Punkt assoziiert zu Q.
- z_Q CM Punkt $\Leftrightarrow$ Die elliptische Kurve $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + z_Q\mathbb{Z})$ hat komplexe Multiplikation (d.h. $\mathbb{Z} \subsetneq \mathrm{End}(E)$).

Complex Multiplication - ein Beispiel

- Der Punkt $i \in \mathbb{H}$ erfüllt
$$i^2 + 1 = 0,$$
also ist er der CM Punkt assoziiert zu $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit Diskriminante $D = -4$.
- Die elliptische Kurve
$$y^2 = x^3 - x$$
hat komplexe Multiplikation, denn
$$[i] : (x, y) \mapsto (-x, iy)$$
lässt E invariant. Also $\mathbb{Z}[i] \simeq \mathrm{End}(E)$.

Geodäten

- Sei nun $D > 0$ und $Q = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ eine quadratische Form der Diskriminante $b^2 - 4ac = D$.
- Dann definiert die Menge der Lösungen von

$$a|z|^2 + bx + c = 0$$

eine Geodäte c_Q in $\mathbb{H}$, also eine vertikale Gerade oder einen Halbkreis um einen Punkt auf der reellen Achse.

Erzeugende Reihen für Spuren von CM Werten

- Sei F modular vom Gewicht 0 (keine Pole in CM Werten).
- Für $D < 0$ definieren wir die D-te Spur von F

$$t_F(D) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_D/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{F(z_Q)}{|\overline{\Gamma}_Q|}.$$

- Zagier: Für $F(z) = J(z) = j(z) - 744$ ist

$$q^{-1} - \sum_{D<0} t_F(D) q^{-D} \qquad (q = e^{2\pi i z})$$

eine schwach holomorphe Modulform vom Gewicht $3/2$.

Erzeugende Reihen für Spuren von Zykelintegralen

- Sei $F \in S_{2k+2}$ eine Spitzenform.
- Für $D > 0$ definieren wir

$$\mathcal{C}(F,Q) = \int_{\Gamma_Q \backslash c_Q} F(z) Q(z,1)^k \, dz.$$

und

$$t_F(D) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_D / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \mathcal{C}(F,Q).$$

- Shintani:

$$\sum_{D>0} t_F(D) q^D.$$

ist eine Spitzenform vom Gewicht $k + 3/2$.

UNIVERSITÄT PADERBORN

Beobachtung

- Die erzeugende Reihe der Spuren von CM Werten einer (speziellen) modularen Funktion ist wieder modular.
- Die erzeugende Reihe der Spuren der Zykelintegrale einer Spitzenform ist wieder eine Spitzenform.

Gemeinsamer Rahmen für die Resultate?

UNIVERSITÄT PADERBORN

Harmonische Maaßformen

- Sei $\Delta_k = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + iky\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)$ der hyperbolische Laplace-Operator vom Gewicht k ($\in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$).

Definition

Eine glatte Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt *harmonische Maaßform vom Gewicht k zu* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ falls

- $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z),$ für alle $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
- $\Delta_k f = 0$.
- Es gibt ein Fourierpolynom $P_f(z) = \sum_{n\leq 0} c^+(n) q^n \in \mathbb{C}[q^{-1}]$, sodass $f(z) - P_f(z) = \mathcal{O}(e^{-Cy})$ für $y \to \infty$ für ein $C > 0$.

UNIVERSITÄT PADERBORN

Die Fourierentwicklung

Lemma (Bruinier–Funke)

Eine harmonische Maaßform vom Gewicht k ($k \neq 1$) hat eine Fourierentwicklung der Form

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n \gg -\infty} c_f^+(n) q^n}_{\text{holomorpher Teil } f^+} + \underbrace{\sum_{n<0} c_f^-(n) \Gamma(k-1, 4\pi|n|v) q^n}_{\text{nicht-holomorpher Teil } f^-},$$

wobei $\Gamma(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ die unvollständige Γ-Funktion bezeichnet.

Notation - Abkürzungen für die verschiedenen Räume

Wir setzen:

- $M_k(p) :=$ Raum der Modulformen vom Gewicht k zu $\Gamma_0(p)$
- $S_k(p) :=$ Raum der Spitzenformen vom Gewicht k zu $\Gamma_0(p)$
- $M_k^!(p) :=$ Raum der schwach holomorphen Modulformen vom Gewicht k zu $\Gamma_0(p)$
- $H_k(p) :=$ Raum der harmonischen Maaßformen vom Gewicht k zu $\Gamma_0(p)$

Beziehung zu klassischen Modulformen

Lemma (Bruinier–Funke)

Definiere den Differentialoperator $\xi_k := 2iy^k\overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}$. *Wir erhalten eine Abbildung*

$$\xi_k : H_k \to S_{2-k}.$$

- $\xi_k(f) = \xi_k(f^-)$.
- ξ_k *ist surjektiv.*

UNIVERSITÄT PADERBORN

Theta Lifts

- Betrachten für F vom Gewicht k

$$I(F,\tau) = \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}} F(z)\overline{\Theta(\tau,z)}y^k y^{-2}dxdy$$

  - $\overline{\Theta(\tau,z)}$ hat Gewicht k in z.
  - $\Theta(\tau,z)$ hat Gewicht ℓ in τ.
  - Abhänging vom Wachstum von F und Θ in y muss das Integral möglicherweise *regularisiert* werden.
- Für „geeignetes“ $\Theta(\tau,z)$ sind die Koeffizienten der Fourierentwicklung durch Spuren von CM Werten oder Zykelintegralen gegeben.
- So kann man die Modularität der Funktionen von Zagier und Shintani beweisen. (Bruinier, Funke, Alfes, Ehlen; Niwa)

Die Partitionsfunktion

- Die erzeugende Funktion der Partitionsfunktion ist *der* Theta-Lift einer Funktion F.
- Die Fourierentwicklung dieses Lifts ist die erzeugende Reihe der Spuren von CM-Werten von F.
- F erfüllt gewissen Eigenschaften.
- $\Rightarrow p(n)$ ist eine endliche Summe von algebraischen Zahlen.

Der Millson Lift

Satz (Alfes-Neumann)

Für $F \in H_0(p)$ ist der getwistete Millson Lift von F eine harmonische Maaßform vom Gewicht $1/2$. Der holomorphe Teil des Lifts ist die erzeugende Reihe der getwisteten CM-Spuren von F.

- Erweiterung für $F \in H_{-2k}$ möglich.
- Nicht-holomorpher Teil ist die Erzeugendenreihe für Spuren der Zykelintegrale von $\xi_0(F)$.

Der Zusammenhang zum Shintani-Lift

Das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} F \in H_{-2k} \arrow[r, "\xi_{-2k}"] \arrow[d, "\text{Millson-Lift}"] & G \in S_{2k+2} \arrow[d, "\text{Shintani-Lift}"] \\ f \in H_{\frac{1}{2}-k} \arrow[r, "\xi_{1/2-k}"] & g \in S_{\frac{3}{2}+k}. \end{tikzcd}$$

UNIVERSITÄT PADERBORN

Elliptische Kurven

- Sei E eine elliptische Kurve über $\mathbb{Q}$ mit Führer p

$$E : y^2 = x^3 + ax + b \quad (a, b \in \mathbb{Q}).$$

- Sei $L(E, s)$ die Hasse-Weil Zeta Funktion von E.
- Wir betrachten Twists von E mit einer Fundamentaldiskriminanten Δ

$$E(\Delta) : \Delta y^2 = x^3 + ax + b.$$

- Mordell-Weil: $E(\mathbb{Q}) \simeq E(\mathbb{Q})^{\text{tors}} \oplus \mathbb{Z}^r$, r der Rang von E.

Der Modularitätssatz und die Vermutung von BSD

- Modularitätssatz (Wiles/...): Für jedes E gibt es ein $G_E(z) = \sum_{n>0} a_E(n) q^n \in S_2(p)$ sodass

$$L(E(\Delta), s) = L(G_E, \chi_\Delta, s) \left(= \sum_{n=1}^{\infty} \chi_\Delta(n) a_E(n) n^{-s} \right).$$

- BSD Vermutung:

$$L(E, s) = c \cdot (s-1)^r + \text{Terme höherer Ordnung},$$

wobei $c \neq 0$ und $r = \mathrm{rank}(E)$.

Rationalität der Fourierkoeffizienten und Verschwinden der zentralen L-Ableitung

Setup:

$$\begin{tikzcd} F_E \in H_0(p) \arrow[r, "\xi_0"] \arrow[d, "\text{Millson}"] & G_E \in S_2(p) \arrow[d, "\text{Shintani}"] & E \arrow[l, squiggly] \\ f_E \in H_{\frac{1}{2}}(4p) \arrow[r, "\xi_{1/2}"] & g_E \in S_{\frac{3}{2}}(4p). & \end{tikzcd}$$

Satz (Bruinier-Ono, Alfes)

Für eine Fundamentaldiskriminante $\Delta > 0$ mit $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 1$ gilt

$$L'(G_E, \chi_\Delta, 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_E^+(\Delta) \in \mathbb{Q}.$$

Implikation für den Rang einer elliptischen Kurve

Satz (Bruinier-Ono, Alfes)

Für eine Fundamentaldiskriminante $\Delta > 0$ mit $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 1$ gilt

$$L'(G_E, \chi_\Delta, 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_E^+(\Delta) \in \mathbb{Q}.$$

Korollar

Sei $\Delta > 0$ eine Fundamentaldiskriminante mit $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 1$. Wenn $c_E^+(\Delta)$ nicht rational ist, ist der Rang von E 1.

Ein Beispiel – die elliptische Kurve $37a1$

- $E : y^2 = 4x^3 - 4x + 1$
- $G_E(z) = q - 2q^2 - 3q^3 + 2q^4 - 2q^5 + 6q^6 + \cdots \in S_2^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(37))$

Δ	$c_E^+(\Delta)$	$L'(E(\Delta), 1)$	$\mathrm{rk}(E(\Delta)(\mathbb{Q}))$
1	$-0.28176178\ldots$	$0.30599977\ldots$	1
12	$-0.48852723\ldots$	$4.29861479\ldots$	1
21	$-0.17273925\ldots$	$9.00238680\ldots$	1
28	$-0.67819399\ldots$	$4.32726024\ldots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1489	$8.99999999\ldots$	0	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
4393	$66.00000000\ldots$	0	3

(Berechnet von Stephan Ehlen und Fredrik Strömberg mit Sage.)

Der Shintani Thetalift von harmonischen Maaßformen

Bemerkung

Sei $\widetilde{H}_k(p)$ definiert durch $\xi_k : \widetilde{H}_k(p) \to M^!_{2-k}(p)$.

Satz

Sei $F \in \widetilde{H}_{2k+2}(p)$. Der (regularisierte) Shintani-Lift von F ist eine harmonische Maaßform vom Gewicht $3/2 + k$. Der holomorphe Teil ist die Erzeugendenreihe der Spuren der regularisierten Zykelintegrale.

Der Lift der nicht-holomorphen Eisensteinreihe

- Sei
$$E_2^*(z) = 1 - 24 \sum_{n \geq 1} \sigma_1(n) q^n - \frac{3}{\pi y} \in \widetilde{H}_2$$
die nicht-holomorphe Eisensteinreihe vom Gewicht 2.
- Sei
$$E_{3/2}^*(z) = \sum_{D \geq 0} H(D) q^D + \frac{1}{16\pi\sqrt{v}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\int_1^\infty e^{-4\pi n^2 vt} t^{-3/2} dt \right) q^{-n^2}$$
die nicht-holomorphe Eisensteinreihe vom Gewicht $3/2$ ($\in H_{3/2}$).
- Hierbei ist $H(D)$ die Hurwitzsche Klassenzahl, die die Äquivalenzklassen binärer quadratischer Formen der Diskriminante D gewichtet mit dem Faktor $2g$ angibt (wobei g die Ordnung der Automorphismengruppe angibt).

UNIVERSITÄT PADERBORN

Verbesserung eines Resultats von Hecke

- Es gilt
$$I_{\Delta}^{Sh}(E_2^*, \tau) = \frac{12H(|\Delta|)}{\sqrt{|\Delta|}} E_{3/2}^*(\tau).$$
- Für eine Fundamentaldiskriminante $\Delta < 0$ und eine Diskriminante $D < 0$ haben wir
$$\sum_{Q \in \mathcal{Q}_{-\Delta D}/\Gamma} \chi_{\Delta}(Q) \int_{\Gamma_Q \backslash c_Q}^{\text{reg}} E_2^*(z)dz = 12H(|\Delta|)H(|D|).$$
- Hecke: $\Delta < 0$ und $D < 0$ koprime Fundamentaldiskriminanten.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!