

Algebra 1

12. Übungsblatt

Aufgabe 12.1 Bestimmen Sie den Zerfällungskörper L von $X^7 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ über \mathbb{Q} und die zugehörige Galoisgruppe $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

Aufgabe 12.2 Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel von Grad 3 und L der Zerfällungskörper von f über \mathbb{Q} .

- (a) Angenommen f hat genau eine reelle Nullstelle. Zeigen Sie, dass dann

$$\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong S_3$$

gilt.

- (b) Angenommen es gilt $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong S_3$. Hat f dann notwendigerweise exakt eine reelle Nullstelle?

Aufgabe 12.3 Gegeben $n \in \mathbb{N}_{>0}$ zeige man, dass $\mathbb{C}(X^n) \subseteq \mathbb{C}(X)$ eine Galois-erweiterung ist mit zyklischer Galoisgruppe.

Aufgabe 12.4 Man zeige: Gegeben eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ und zwei verschiedene normierte irreduzible Polynome in $K[X]$ kann kein Element der Galoisgruppe $\text{Gal}(L/K)$ eine Nullstelle des einen Polynoms in eine Nullstelle des anderen Polynoms überführen.

Aufgabe 12.5 Man zeige: Gegeben eine endliche Galois-erweiterung $L \supseteq K$ ist die Spurabbildung

$$S_L^K : L \rightarrow K, x \mapsto \sum_{\sigma \in \text{Gal}(L/K)} \sigma(x)$$

eine K -lineare von Null verschiedene Abbildung und die Spurform

$$L \times L \rightarrow K, (x, y) \mapsto S_L^K(xy)$$

eine nichtausgeartete Bilinearform auf dem K -Vektorraum L .

Abgabetermin: Mittwoch, den 28.01.2026 bis 16.00 Uhr im blauen Briefkasten 1 (auf dem Flur von D1).