Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Wintersemester 2025/2026

Algebra 1

6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Der Kring $\mathbb{Z}[X]$ ist kein Hauptidealring.

(b) Für jeden Körper $\mathbb{K}$ ist $\mathbb{K}[X]$ als Kring nicht isomorph zum Kring $\mathbb{K}[Y, Z]$.

Aufgabe 6.2 Sei R ein faktorieller Kring mit Quotientenkörper $\mathbb{K}$ und seien $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ normierte Polynome. Zeigen Sie, dass aus $PQ \in R[X]$ bereits $P, Q \in R[X]$ folgt.

Aufgabe 6.3

(a) Seien R ein faktorieller Ring, $q \in \mathrm{Frac}(R)$ ein Element seines Quotientenkörpers und $n \geq 1$ mit $q^n \in R$. Zeigen Sie, dass $q \in R$ gilt.

(b) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ und $Q \in \mathbb{K}(X_1, \ldots, X_n)$ aus dem Quotientenkörper von $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ mit $Q^2 = P$. Zeigen Sie, dass dann bereits $Q \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ gilt.

Aufgabe 6.4 Zeigen Sie: Gegeben ein Polynom

$$a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_i \in \mathbb{Z}$ und eine rationale Nullstelle $\frac{p}{q}$ des obigen Polynoms mit p, q teilerfremden ganzen Zahlen, so ist p ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_n.

Abgabetermin: Mittwoch, den 26.11.2025 bis 16.00 Uhr im blauen Briefkasten 1 (auf dem Flur von D1).