

Klausur Algebra 1

Name:

Matrikelnummer:

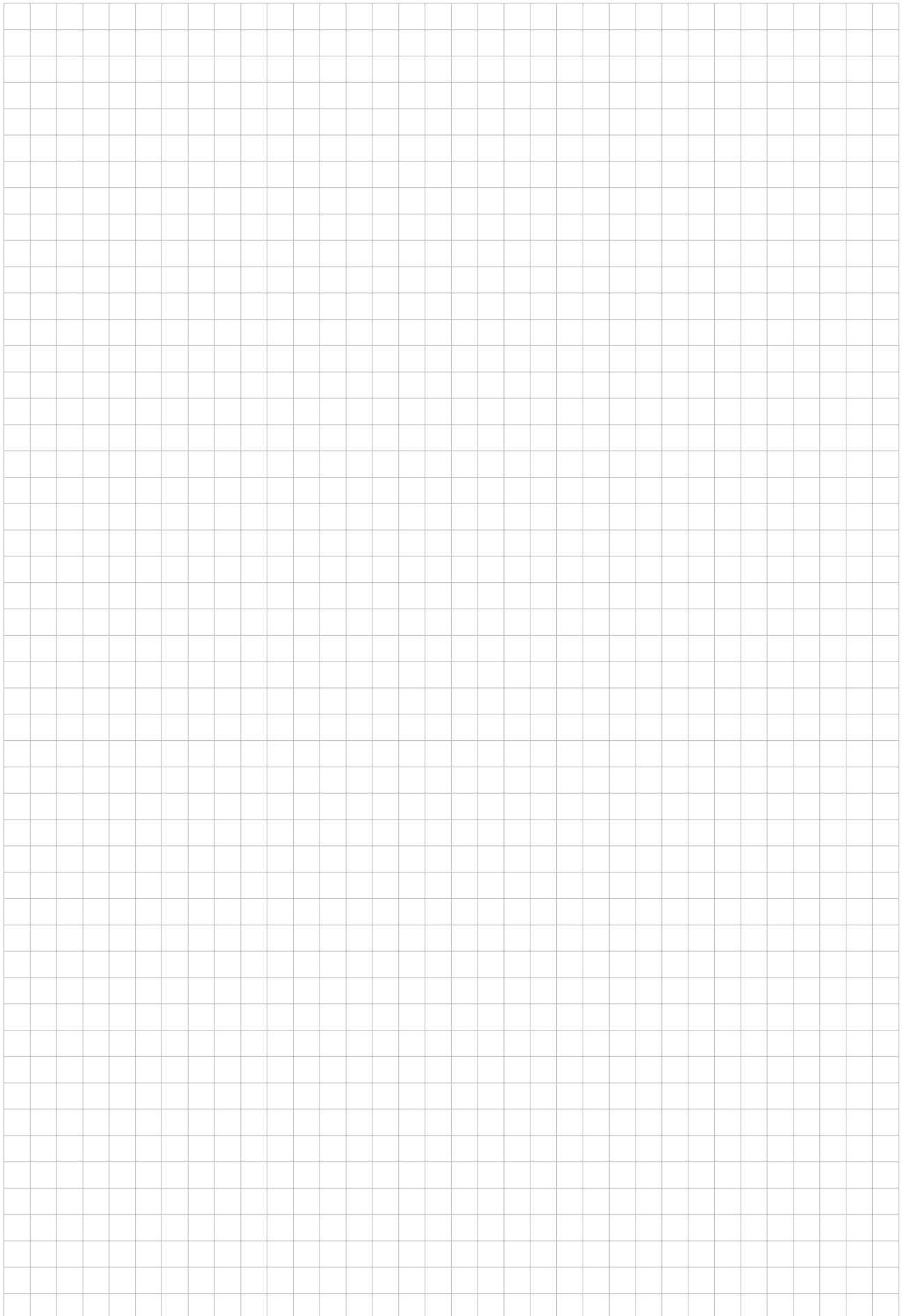
Wichtige Informationen:

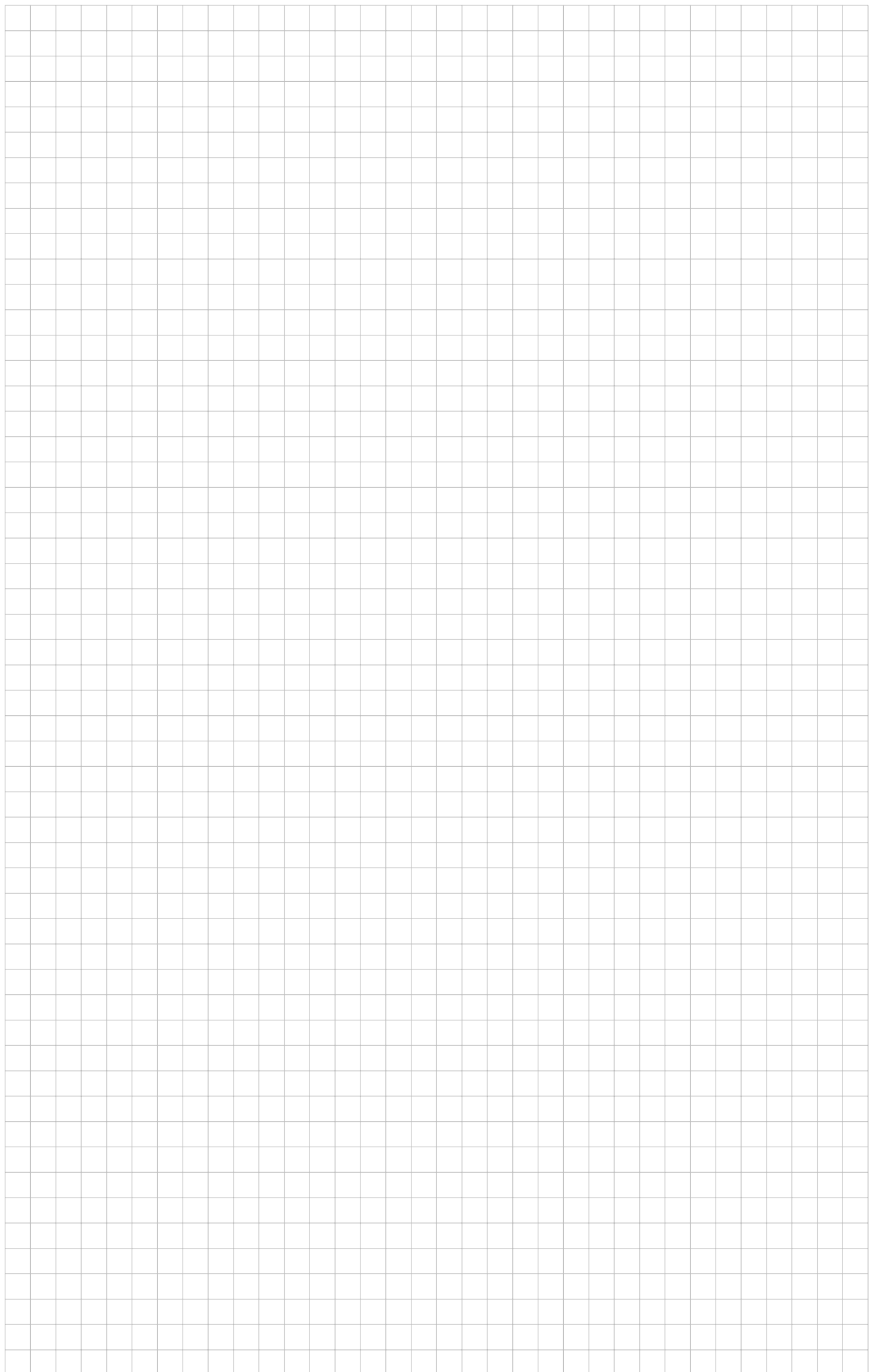
- Als Hilfsmittel ist alles in Papierform erlaubt. Elektronische Hilfsmittel sind verboten.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben mit insgesamt 100 Punkten. Um die Klausur zu bestehen, müssen Sie mindestens 40 Punkte erreichen.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein. Begründen Sie alle Ihre Antworten!

1	2	3	4	5	6	Summe

Aufgabe 1: (13 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 35 zyklisch ist.

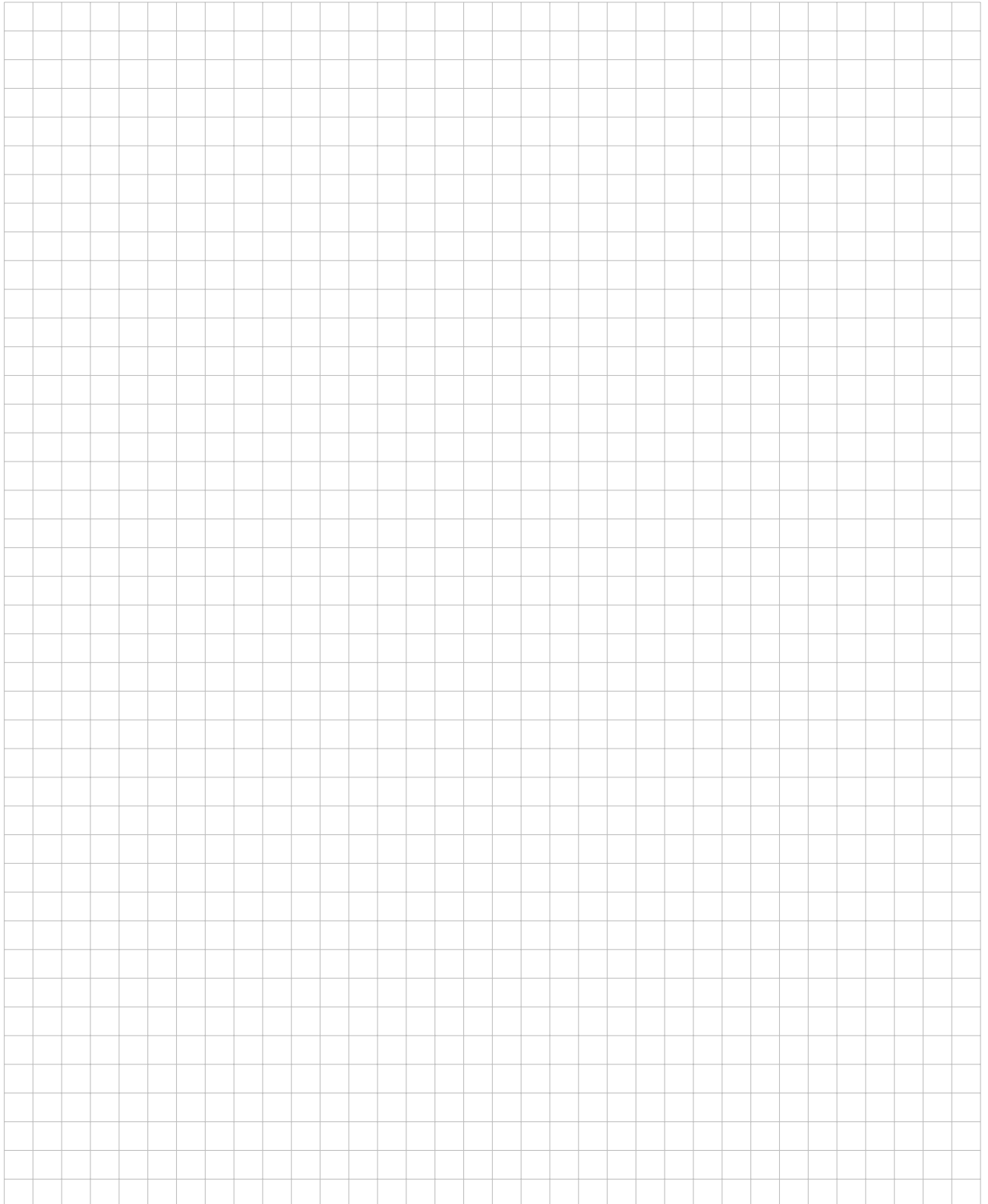




Aufgabe 2: (12=3+3+3+3 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie (begründen Sie Ihre Antwort):

- (a) Jede endliche abelsche Gruppe ist zyklisch.
- (b) Jeder faktorielle Ring ist euklidisch.
- (c) Jede Untergruppe der S_4 ist auflösbar.
- (d) Es existiert ein Körper K und ein $n \in \mathbb{N}$, sodass K keine Körpererweiterungen von Grad n besitzt.



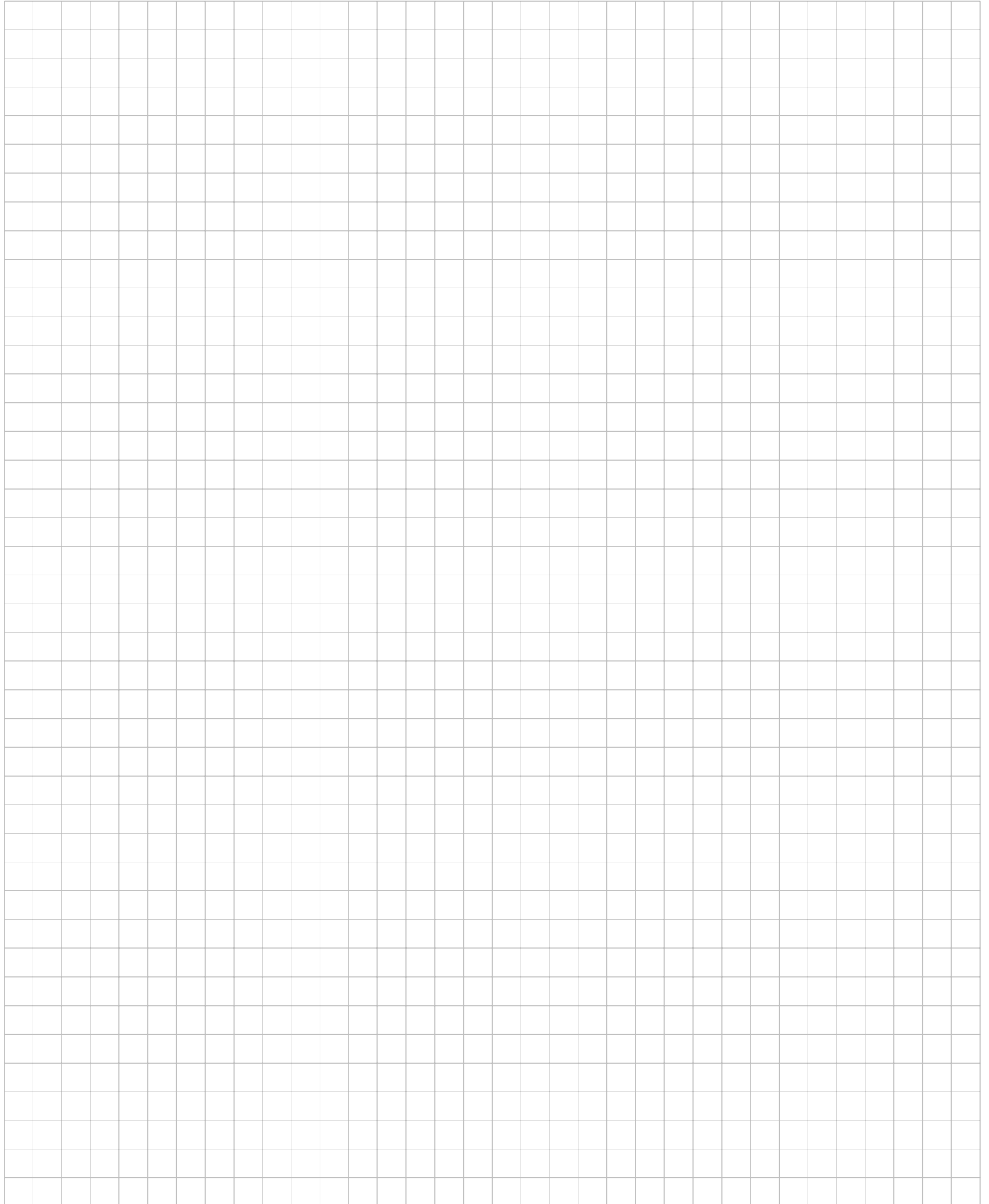


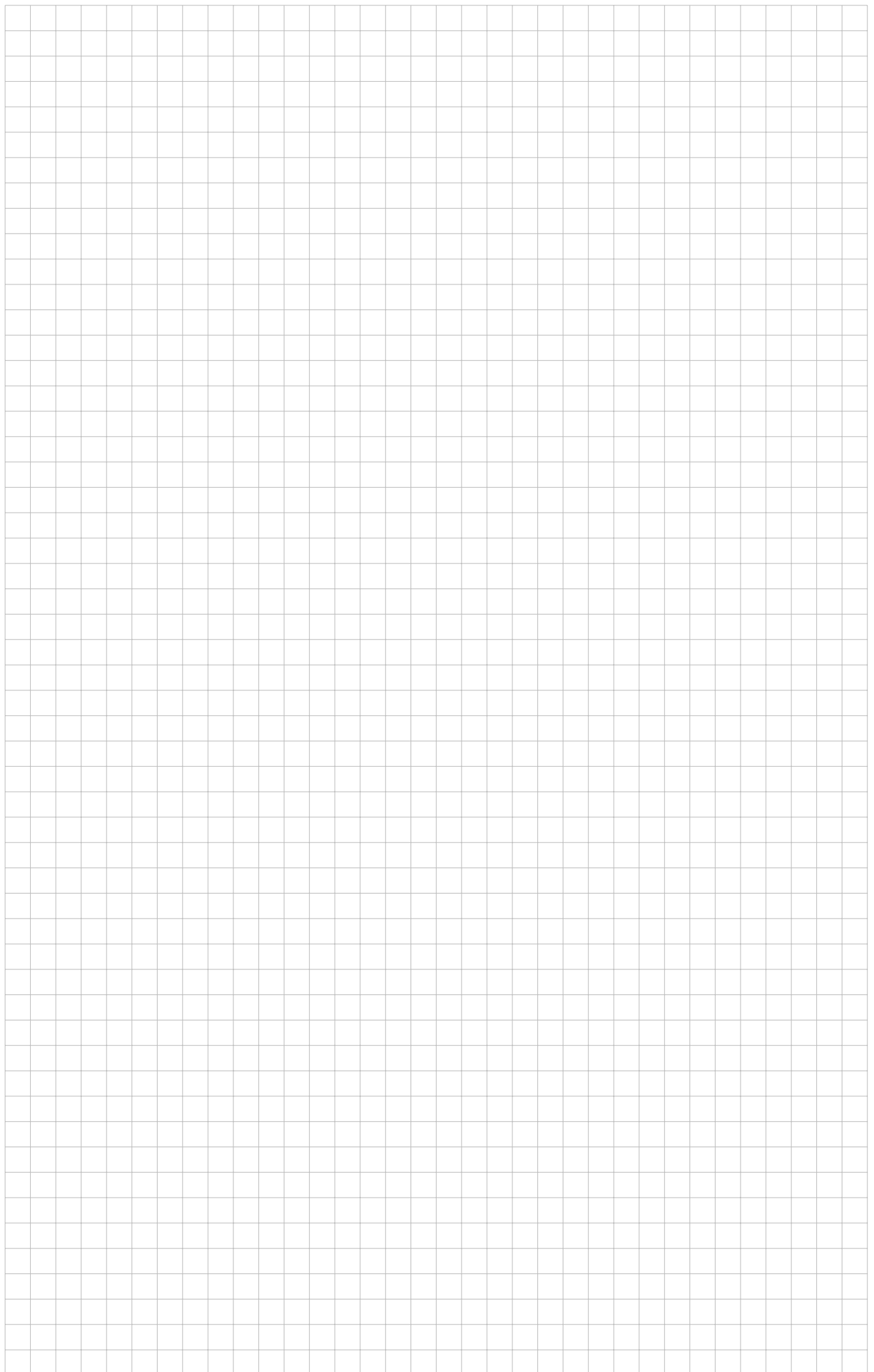
Aufgabe 3: (15=4+11 Punkte)

- (i) Sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{8}}$. Zeigen Sie, dass die primitiven 8-ten Einheitswurzeln gegeben werden durch

$$\zeta, \bar{\zeta}, \zeta^3, \bar{\zeta}^3;$$

- (ii) Bestimmen Sie das achte Kreisteilungspolynom Φ_8 .

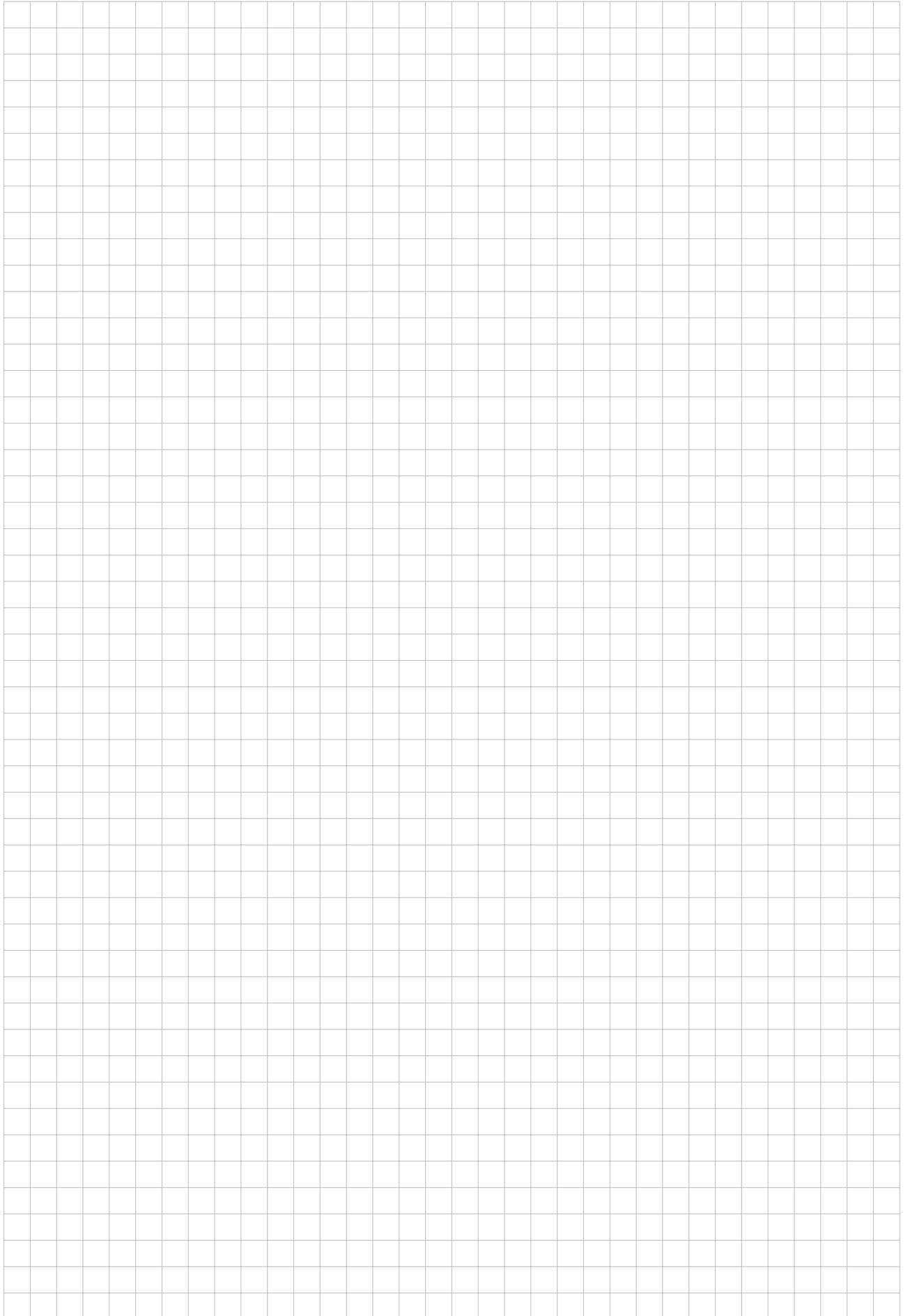


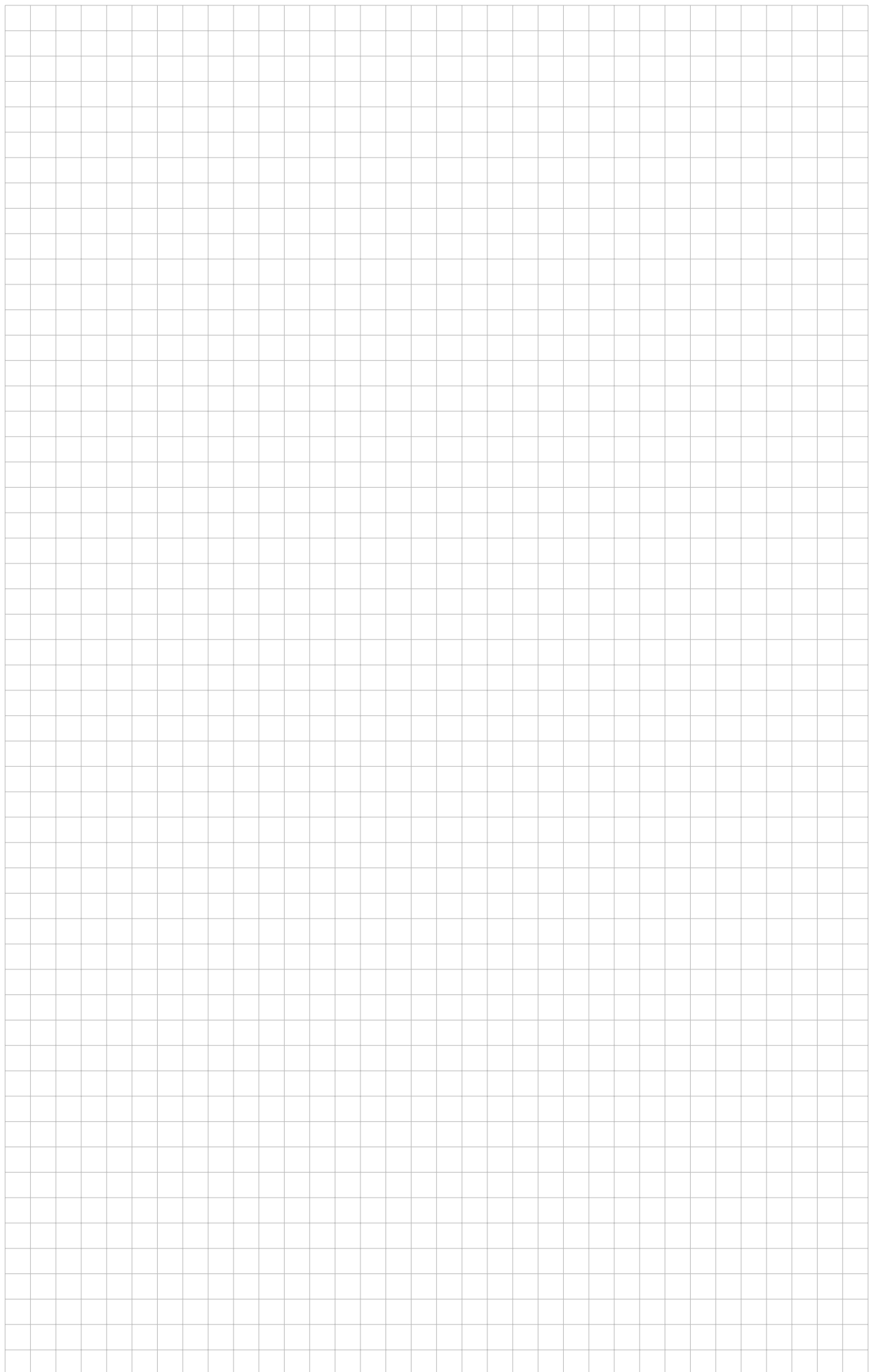


Aufgabe 4: (25=5+20 Punkte)

Bestimmen Sie

- (i) den Zerfällungskörper L des Polynoms $X^5 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$
- (ii) und die Galoisgruppe $\text{Gal}(L|\mathbb{Q})$ der Erweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$





Aufgabe 5: (20=8+12 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und S_n die n -te Permutationsgruppe. Für $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ sei $\tau_{i,j} = (i\ j) \in S_n$ die Transposition, welche i und j vertauscht und alle anderen Elemente fixiert.

- (i) Zeige, dass für jedes $\sigma \in S_n$ und alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$

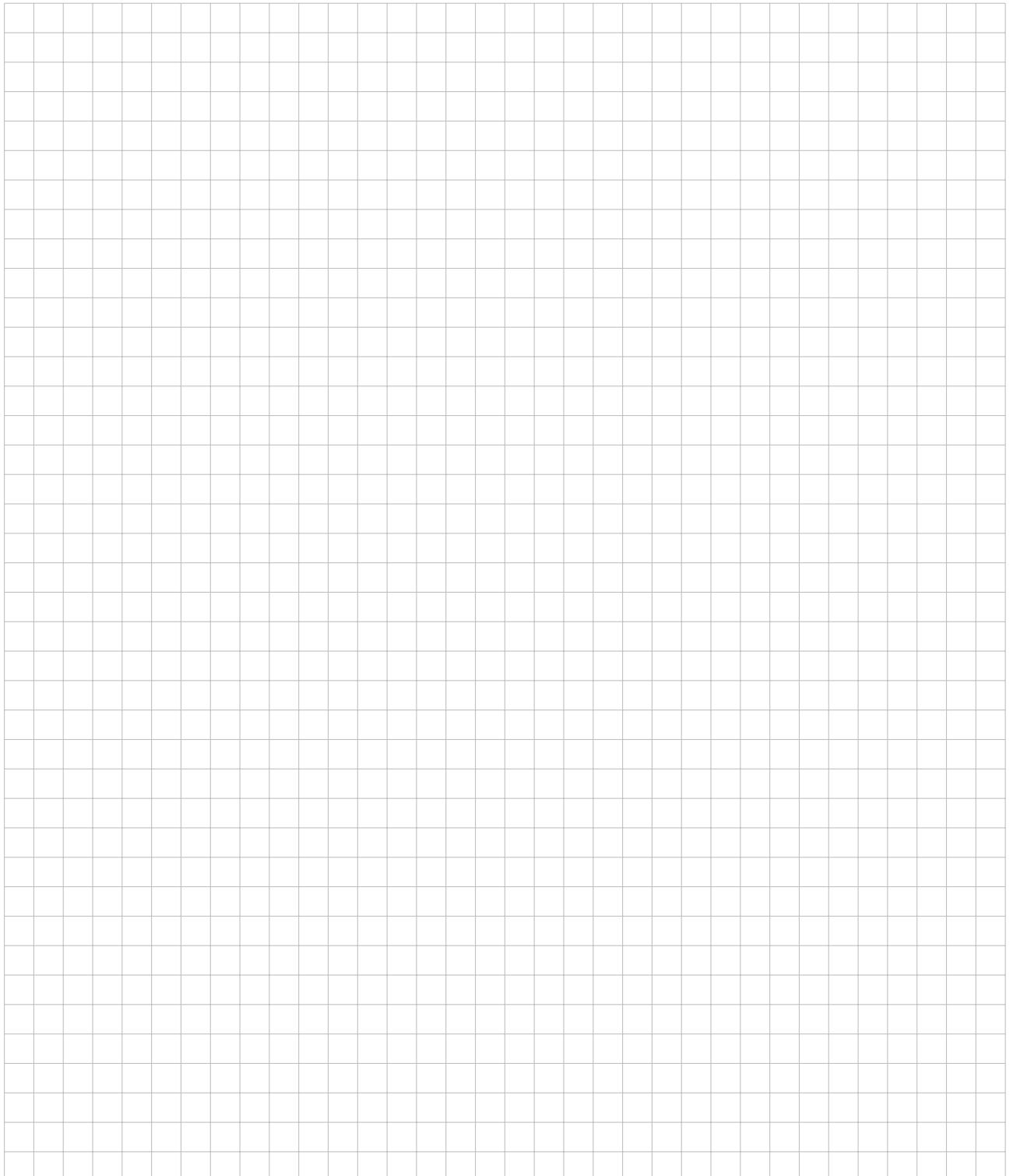
$$\sigma \tau_{i,j} \sigma^{-1} = \tau_{\sigma(i), \sigma(j)}$$

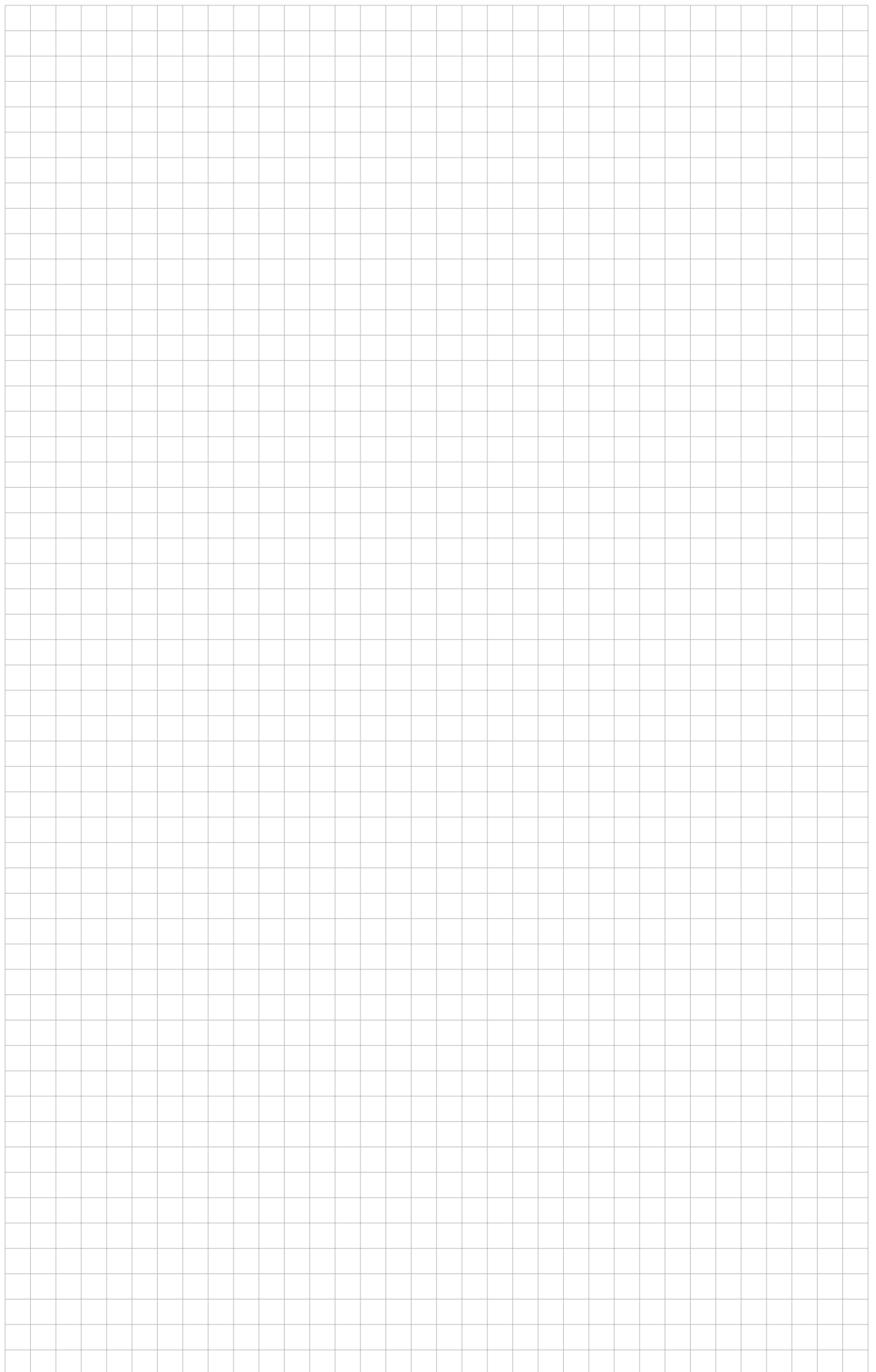
gilt.

- (ii) Sei nun $\tau_{1,2} = (1\ 2)$ und $\sigma = (1\ 2\ \dots\ , n) \in S_n$. Zeigen Sie, dass

$$S_n = \langle \tau_{1,2}, \sigma \rangle$$

gilt, also dass die Untergruppe, welche von $\tau_{1,2}$ und σ erzeugt wird, bereits die gesamte Gruppe S_n ist.





Aufgabe 6: (15=8+7 Punkte)

- (i) Bestimmen Sie alle normierten quadratischen irreduziblen Polynome in $\mathbb{F}_3[X]$. Hinweis: Es gibt drei Stück.
- (ii) Seien P_1, P_2, P_3 die Polynome aus (i) und sei $K_i := \mathbb{F}_3[X]/\langle P_i \rangle$ für $i = 1, 2, 3$. Zeigen Sie, dass die Körper K_1, K_2 und K_3 zueinander isomorph sind.

