

Algebra 1

0. Übungsblatt

Die Aufgaben auf diesem Übungsblatt werden am Freitag den 17.10.2025 in der Übung besprochen und müssen nicht abgegeben werden.

Aufgabe 0.1 Sei G eine Gruppe.

- (a) Das Zentrum von G ist definiert durch

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G : xg = gx\}.$$

Zeigen Sie, dass $Z(G)$ eine normale Untergruppe von G ist. Für welche Gruppen gilt $G = Z(G)$? Bestimmen Sie $Z(G)$ für

- (i) $G = S_n, n \geq 2$
 - (ii) $G = \text{GL}(n, \mathbb{K}), n \geq 1$ und $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper
 - (iii) $G = \{g \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) : g_{kk} = 1, g_{ij} = 0 \ \forall \ 1 \leq i, j, k \leq n, i > j\}$
- (b) Sei $x \in G$. Dann ist der Zentralisator von x in G definiert durch

$$Z_G(x) = \{g \in G : gx = xg\}.$$

Zeigen Sie, dass $Z_G(x)$ eine Untergruppe von G ist. Für welche $x \in G$ ist $Z_G(x) = G$? Ist $Z_G(x)$ stets normal?

- (c) Sei $H \leq G$. Zeigen Sie, dass der Normalisator von H definiert durch

$$N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$$

eine Untergruppe von G mit $H \trianglelefteq N_G(H)$ ist. Man bestimme für $G = \text{SL}_2(\mathbb{F}_5)$ und H die Diagonalmatrizen $N_G(H)$ und zeige

$$N_G(H) \cong Q_8$$

wobei

$$Q_8 = \langle i, j, k : i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j \rangle$$

die Quaternionengruppe bezeichnet.

Aufgabe 0.2 Zeigen Sie, dass jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe zyklisch ist.

Aufgabe 0.3 Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung p^2 abelsch ist. Welche gibt es bis auf Isomorphie?