Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Wintersemester 2025/2026

Algebra 1

1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Jede Untergruppe H von G mit $[G : H] = 2$ ist normal in G.

(b) Gilt $\operatorname{ord}(x) \leq 2$ für alle $x \in G$, so ist G abelsch.

(c) Jede Untergruppe der Quaternionengruppe Q_8 ist normal.

Beweisen oder widerlegen Sie zusätzlich die folgende Aussage: Die Quaternionengruppe Q_8 ist isomorph zur Heisenberggruppe

$$H = \{g \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_2) : g_{kk} = 1, g_{ij} = 0 \ \forall\ 1 \leq i, j, k \leq n, i > j\}$$

über $\mathbb{F}_2$.

Aufgabe 1.2 Klassifizieren Sie alle Gruppen der Ordnung 8.

(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1.1 um zu schlussfolgern, dass in einer nicht abelschen Gruppe G mit $|G| = 8$ eine normale Untergruppe existieren muss, welche isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist.)

Aufgabe 1.3 Sei G eine Gruppe.

(a) Es sei
$$[G, G] = \langle \{[g, h] : g, h \in G\} \rangle$$
mit $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$ für $g, h \in G$. Man nennt $[G, G]$ die Kommutatorgruppe von G. Zeigen Sie, dass $[G, G] \trianglelefteq G$ und dass $G/[G, G]$ abelsch ist.

(b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ erkläre man rekursiv
$$G^{(n)} = \begin{cases} G & n = 0 \\ [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] & n \geq 1 \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass $G^{(n)} \trianglelefteq G$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(c) Für $n \in \mathbb{N}_0$ erkläre man rekursiv
$$G^{n} = \begin{cases} G & n = 0 \\ [G^{n-1}, G] & n \geq 1 \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass $G^{(n)} \trianglelefteq G^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(d) Bestimmen Sie G^k und $G^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ für die Gruppen

(i) $N = \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) : g_{kk} = 1, g_{ij} = 0 \ \forall\ 1 \leq i, j, k \leq n, i > j\}$
(ii) $B = \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) : g_{ij} = 0 \ \forall\ 1 \leq i, j \leq n, i > j\}$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K}$ einen beliebigen Körper bezeichnet.

(e) G heißt auflösbar, beziehungsweise nilpotent, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $G^{(n)} = \{e\}$ beziehungsweise $G^n = \{e\}$. Welche der Gruppen in (d) (i) und (ii) ist auflösbar beziehungsweise nilpotent?

(f) Zeigen Sie: Ist G nilpotent und nicht die triviale Gruppe, so gilt $Z(G) \neq \{e\}$.

(g) Man zeige die Äquivalenz folgender Aussagen

  (i) G is auflösbar.

  (ii) Es gibt eine Kette von normalen Untergruppen von G

$$G \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_n \supseteq G_{n+1} = \{e\}$$

  mit G_i/G_{i+1} abelsch.

(h) Zeigen Sie: Ist G auflösbar/nilpotent, so auch jede Untergruppe und Faktorgruppe von G. Zeigen Sie zudem für eine normale Untergruppe N von G, dass

$$G \text{ ist auflösbar} \iff N \text{ und } G/N \text{ sind auflösbar.}$$

Zeigen Sie exemplarisch, dass aus der Nilpotenz von N und G/N im Allgemeinen nicht die Nilpotenz von G folgt.

Aufgabe 1.4 Sei p eine Primzahl. G heißt p-Gruppe, falls G eine Gruppe der Ordnung $|G| = p^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_{>0}$ ist. Zeigen Sie: Ist G eine p-Gruppe, so ist

(a) $Z(G) \neq \{e\}$.

(b) G auflösbar.

(c) G nilpotent.

Abgabetermin: Mittwoch, den 22.10.2025 bis 16.00 Uhr im blauen Briefkasten 1 (auf dem Flur von D1).