

Algebra 1

10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1 Ein endlicher Körper kann nie algebraisch abgeschlossen sein.

Aufgabe 10.2 Geben Sie einen Körperisomorphismus $\mathbb{F}_5(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{F}_5(\sqrt{3})$ an als \mathbb{F}_5 -lineare Abbildung in Bezug auf die \mathbb{F}_5 -Basen $1, \sqrt{2}$ von $\mathbb{F}_5(\sqrt{2})$ und $1, \sqrt{3}$ von $\mathbb{F}_5(\sqrt{3})$.

Aufgabe 10.3 (Partialbruchzerlegung) Zeigen Sie die folgende Aussage: Ist k ein Körper, so wird eine k -Basis des Funktionenkörpers $k(X)$ gebildet von erstens den $(X^n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ mitsamt zweitens den

$$(X^d P^{-n})_{d \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}_{>0}, \deg(P) > d}$$

für $P \in k[X]$ normiert und irreduzibel zuzüglich drittens der 1 aus $k(X)$.

Aufgabe 10.4 Man zeige, dass eine algebraische Körpererweiterung eines unendlichen Körpers stets dieselbe Kardinalität hat wie der Ausgangskörper.

Aufgabe 10.5 Es sei K ein Körper, $P \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ und L/K der Zerfällungskörper von P . Zeigen Sie die Abschätzung:

$$[L : K] \leq n!.$$

Abgabetermin: Mittwoch, den 14.01.2026 bis 16.00 Uhr im blauen Briefkasten 1 (auf dem Flur von D1).