Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Wintersemester 2025/2026

Algebra 1

11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1 Sei K ein endlicher Körper mit $|K| = p^r$ für $p \in \mathbb{N}_{>0}$ prim und $r \in \mathbb{N}_{>0}$.

(i) Bestimmen Sie die Gruppe $(K, +)$ bis auf Isomorphie.

(ii) Für welche r ist die Gruppe $(K, +)$ zyklisch?

(iii) Zeigen Sie, dass ein irreduzibles Polynom $P \in \mathbb{F}_p[X]$ existiert, sodass K als Körper isomorph zum Körper $\mathbb{F}_p/\langle P\rangle$ ist.

Aufgabe 11.2 Sei p prim, $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen und $K = \mathbb{F}_p(x, y)$ der Körper der rationalen Funktionen in zwei Variablen über $\mathbb{F}_p$. Konstruieren Sie eine endliche Erweiterung von K von Grad p^2, welche nicht primitiv ist.

Aufgabe 11.3 Sei K ein Körper, $a \in K^\times$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Man zeige, dass im Zerfällungskörper des Polynoms $X^n - a$ auch das Polynom $X^n - 1$ stets in Linearfaktoren zerfällt, dass aber umgekehrt im Zerfällungskörper des Polynoms $X^n - 1$ ein Polynom $X^n - a$ nicht notwendig in Linearfaktoren zerfallen muss.

Aufgabe 11.4 Man zeige: Gegeben eine Primzahl $p \in \mathbb{N}_{>0}$ und zwei primitive p-te Einheitswurzeln $\zeta, \xi \in \mathbb{C}$ gilt $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(\xi)$ und es gibt genau einen Körperhomomorphismus $\mathbb{Q}(\zeta) \to \mathbb{Q}(\zeta)$ mit $\zeta \mapsto \xi$.

Aufgabe 11.5 Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und L algebraisch abgeschlossen. Zeigen Sie, dass die Menge der über K algebraischen Element von L einen algebraischen Abschluss von K bildet.

Aufgabe 11.6 Zeigen Sie, dass eine abelsche Gruppe nicht durch endlich viele Nebenklassen zu Untergruppen von unendlichem Index überdeckt werden kann.

Abgabetermin: Mittwoch, den 21.01.2026 bis 16.00 Uhr im blauen Briefkasten 1 (auf dem Flur von D1).