

# Algebra 1

## 2. Übungsblatt

**Aufgabe 2.1** Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $pq$  für Primzahlen  $p, q \in \mathbb{N}$

- (a) Zeige, dass  $G$  auflösbar ist.
- (b) Sei  $p < q$  und  $q \not\equiv 1 \pmod{p}$ . Zeige, dass  $G$  zyklisch ist.
- (c) Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 15 zyklisch ist.

**Aufgabe 2.2** Klassifizieren Sie alle Gruppen mit Ordnung  $\leq 15$  bis auf Isomorphie.

**Aufgabe 2.3** Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und

$$\epsilon : S_n \rightarrow \{\pm 1\}, \pi \mapsto \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}.$$

Zeigen Sie, dass  $\epsilon$  ein Gruppenhomomorphismus ist.

Sei zudem  $A_n = \ker(\epsilon)$  die sogenannte alternierende Gruppe. Zeigen Sie, dass  $S_n \cong A_n \rtimes \mathbb{Z}_2$  gilt.

**Aufgabe 2.4**

- (a) Zeigen Sie, dass jede Doppeltransposition

$$\tau_{ij}\tau_{kl} \in S_n$$

mit  $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$  ein Produkt von zwei Dreizykeln ist, falls  $n \geq 5$ .

- (b) Zeige, dass  $A_n$  von Dreizykeln erzeugt wird.

**Aufgabe 2.5** Bestimmen Sie das multiplikative Inverse von 32 in  $(\mathbb{Z}/115\mathbb{Z})^\times$ .

**Abgabetermin:** Mittwoch, den 29.10.2025 bis 16.00 Uhr im blauen Briefkasten 1 (auf dem Flur von D1).