

Algebra 1

2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1 Sei G eine Gruppe der Ordnung pq für Primzahlen $p, q \in \mathbb{N}$

- (a) Zeige, dass G auflösbar ist.
- (b) Sei $p < q$ und $q \not\equiv 1 \pmod{p}$. Zeige, dass G zyklisch ist.
- (c) Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 15 zyklisch ist.

Aufgabe 2.2 Klassifizieren Sie alle Gruppen mit Ordnung ≤ 15 bis auf Isomorphie.

Aufgabe 2.3 Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$\epsilon : S_n \rightarrow \{\pm 1\}, \pi \mapsto \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}.$$

Zeigen Sie, dass ϵ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Sei zudem $A_n = \ker(\epsilon)$ die sogenannte alternierende Gruppe. Zeigen Sie, dass $S_n \cong A_n \rtimes \mathbb{Z}_2$ gilt.

Aufgabe 2.4

- (a) Zeigen Sie, dass jede Doppeltransposition

$$\tau_{ij}\tau_{kl} \in S_n$$

mit $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$ ein Produkt von zwei Dreizykeln ist, falls $n \geq 5$.

- (b) Zeige, dass A_n von Dreizykeln erzeugt wird.

Aufgabe 2.5 Bestimmen Sie das multiplikative Inverse von 32 in $(\mathbb{Z}/115\mathbb{Z})^\times$.

Abgabetermin: Mittwoch, den 29.10.2025 bis 16.00 Uhr im blauen Briefkasten 1 (auf dem Flur von D1).